



Patronato de la Alhambra y Generalife
CONSEJERÍA DE CULTURA

La presente colección bibliográfica digital está sujeta a la legislación española sobre propiedad intelectual.

De acuerdo con lo establecido en la legislación vigente su utilización será exclusivamente con fines de estudio e investigación científica; en consecuencia, no podrán ser objeto de utilización colectiva ni lucrativa ni ser depositadas en centros públicos que las destinen a otros fines.

En las citas o referencias a los fondos incluidos en la investigación deberá mencionarse que los mismos proceden de la Biblioteca del Patronato de la Alhambra y Generalife y, además, hacer mención expresa del enlace permanente en Internet.

El investigador que utilice los citados fondos está obligado a hacer donación de un ejemplar a la Biblioteca del Patronato de la Alhambra y Generalife del estudio o trabajo de investigación realizado.

This bibliographic digital collection is subject to Spanish intellectual property Law. In accordance with current legislation, its use is solely for purposes of study and scientific research. Collective use, profit, and deposit of the materials in public centers intended for non-academic or study purposes is expressly prohibited.

Excerpts and references should be cited as being from the Library of the Patronato of the Alhambra and Generalife, and a stable URL should be included in the citation.

We kindly request that a copy of any publications resulting from said research be donated to the Library of the Patronato of the Alhambra and Generalife for the use of future students and researchers.

***Biblioteca del Patronato de la Alhambra y Generalife
C / Real de la Alhambra S/N . Edificio Nuevos Museos
18009 GRANADA (ESPAÑA)***

+ 34 958 02 79 45

biblioteca.pag@juntadeandalucia.es

L. D. Bugueiro de la Camara

DISCURSO

QUE EN LA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

PRONUNCIÓ

EN LA SOLEMNE APERTURA

DEL CURSO ACADÉMICO DE 1878 A 1879

EL DOCTOR

DON EDUARDO LEON Y ORTIZ

CATEDRÁTICO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

BIBLIOTECA DE
LA ALHAMBRA

Est. A-4
Tabl. 4
N.º 55

GRANADA

IMPRENTA DE I. VENTURA SABATEL

1878

JUNTA DE ANDALUCIA

A-4
4
55

BIBLIOTECA DE LA ALHAMBRA

BIBLIOTECA DE LA ALHAMBRA

DISCURSO

QUE EN LA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

PRONUNCIÓ

EN LA SOLEMNE APERTURA

DEL CURSO ACADÉMICO DE 1878 Á 1879

EL DOCTOR

DON EDUARDO LEON Y ORTIZ

P.C. Monumental de la Alhambra y Generalife

CONSEJERÍA DE CULTURA

CATEDRÁTICO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS



JUNTA DE ANDALUCIA

Donativo del Sr. Conde de Romanones á la Biblioteca de la Alhambra.

GRANADA

IMPRENTA DE I. VENTURA SABATEL

1878

Donativo del Sr. Conde de
Romanones á la Biblioteca
de la Alhambra. 1888

Ilmo. Señor:

Con bellissimo cielo, un monumento en cada colina y un hecho glorioso en cada página de su historia, ¿qué ciudad pudo hablar más á la fantasía ni elevar más el sentimiento que la famosa Atenas? Y en efecto aquella mansion la amaron las Musas predilectamente. Sombras inmortales, evocadas por Esquilo y Sófoles, hicieron derramar tiernas lágrimas, conmoviendo con sus trágicos infortunios, y en el Pnyx, no obstante quedar á sus espaldas oculto el Pireo, recuerdo de tanta gloria y poderío, resonó la más hermosa elocuencia, tanto más hermosa cuánto que tenia por objeto conservar puro el santo amor de la patria. Pero tambien allí la filosofía y las matemáticas brillaron con esplendor, y en el seno de una Academia celeberrima un gran maestro, cuyo nacimiento no quiere ceder Atenas á su cercana isla Egina, el divino Platon, emprendia con sus discípulos las más abstractas especulaciones, inquiriendo, con ocasion de las doctrinas de Parménides, si de algun modo podia ser el no ser, al propio tiempo que ideando secciones en el cono, abria el derrótero de las más famosas investigaciones matemáticas. ¡Grandes guerreros, artistas, poetas, filósofos y matemáticos fueron atenienses!

Y con tal precedente en la historia, ¿podian las condiciones poéticas de Granada ser parte á hacerme vacilar en la eleccion de tema? ¡Cómo! ¿las molduras de la Alhambra serian menos propicias á las ciencias abstractas que las columnas del Parthenon? Si aquí en la celebrada vega deleita el curso del Genil y la enhiesta cima de Mulahasan realza el fondo del panorama, ¿no extasiaba á los poetas, allá en Atenas, la corriente del Cefiso y no se embellecía la perspectiva del Acrópolis al proyectarse sobre la falda del Himeto? Y cuando, para más completo parecido, atraida por los acentos de un gran poeta, honra de Granada, la poesía de Atenas, acompañando á la sombra de Edipo, se ha complacido en visitar este suelo, ¿la ciencia, allí cultivada, le miraría como extraño? Mia fe, nunca supe imaginarlo, y al venir á mí, por no sé que mal consejo de la fortuna, la tarea, tan árdua por el desempeño como gustosa por el objeto, de alentar á la juventud, en este venerando recinto congregada para dar comienzo á un brillante año académico, juzgué desde luego que un tema, merced al cual, á la luz de la filosofía, se viera la obra de las matemáticas en la depuracion de sus conceptos trascendentales, sería tan adecuado á excitar el talento de todos, que poderosos, con el calor de sus propias ideas, á discurrir ámpliamente sobre el punto propuesto, apenas si pensarian en cotejar con lo valioso que se les ocurría, lo que sin mérito se les presentaba. Del agrado de mis compañeros en el profesorado era ofensa preocuparme: que siempre fué de grandes sabios oír con cariñosa benevolencia á todos, aun á quien, si no es por el afan de aprender, por otra cosa no acertaria á igualárseles. Así aliviadas y seducidas mis fuerzas, con algun más aliento del que en otro caso tendria, entro á ocuparme:

DE ALGUNAS LEYES Á LAS CUALES PARECE OBEDECER EL PROGRESO MATEMÁTICO.

I.

¿Y se reputará extraño que empiece por conceder que las matemáticas, no obstante su firmeza y exactitud, adolecen de error en sus principios y de contradicción en su desenvolvimiento? Pues tan no es en mi ánimo oponerme á estas concesiones, que quiero dejar oír distintamente la voz de los impugnadores.

¡Pretenden esas ciencias, dirán ellos, pasar por la obra maestra del discurso humano, y en el siglo anterior en que D'Alembert y Nicolai suscitaban dudas á propósito de las cantidades negativas, ya se conoció la necesidad de variar los fundamentos del cálculo, porque no se vieran envueltos los matemáticos en patentes absurdos, y en esta nuestra época en que del imaginarismo tanto se ocupan, confiando unos y dudando otros que sea hacedero dar realidad á lo imposible, sábias corporaciones tambien proponen que las ciencias exactas se expongan con arreglo á nuevos principios, con otra subordinacion y otro enlace! ¡Modelo unas ciencias en que hasta los cimientos se quiere renovar! Verdaderamente no cabe decir que con el cálculo no se han alcanzado grandes descubrimientos, pero cabe preguntar á los matemáticos si siempre han entendido lo que manejaban, pues si la invencion del Algebra, como afirman, señala una fecha gloriosa, será en lo que toque al pensamiento, no al entendimiento, que desde entonces si se pensó más, menos en cambio se entendió.

Quando la Aritmética se desenvolvía sin confundir en un tan intrincado simbolismo la pura nocion de la pluralidad, habria sin duda claridad y consecuencia en el sentido de las operaciones; pero despues ¿qué matemático se ha conservado fiel á sus principios? Nada, al decir de ellos, más lógico que el proceder del cálculo, en que no se hace otra cosa que componer ó agregar unas veces, y otras descomponer ó disgregar, habiendo en todo ello hilacion tan sencilla que una de las operaciones directas no es más que una adición abreviada, y otra, un caso particular de multiplicacion sucesiva. Pero esperad: acto continuo vereis cómo metidos en las asperézas del cálculo, hacen girones tan hermosa sencillez. Con las cantidades negativas cambiarán una sustraccion en adición, con las fraccionarias una division en multiplicacion, y con los exponentes fraccionarios una extraccion de raíz en elevacion á potencia; sin que por eso dejen de afirmar sériamente, en contradicción manifiesta con sus principios, que suman y están restando; que multiplican y están dividiendo; que elevan á potencia, y es una extraccion de raíz lo que están practicando. ¿No será entonces punto y sazón de preguntarles, no sin asomo de ironía: componeis ahora ó descomponeis? ¿agregais ó disgregais? ¿qué distincion quereis al cabo establecer entre las operaciones directas y sus inversas, cuando tan á sabor vuestro las manejaís y confundís? ¿y puesto que así useis de cantidades y exponentes no enteros, mirareis todavía la multiplicacion como adición regular y la elevacion á potencias como multiplicacion, á su vez tambien regular?

Mas sin duda que contestarán: cierto que el sentido de las operaciones es el que la Aritmética fija, derivándole de la clara nocion de pluralidad: realmente solo hay operacion directa cuando la cantidad se amplía, despliega ó desenvuelve, y operacion inversa cuando por el contrario la cantidad se reduce, pliega ó envuelve; pero el espíritu peculiar del Algebra exige que tales aspectos se cambien por otros, en cierto modo de artificio y convenio, aun cuando de valiosa utilidad, porque con eso las reglas del cálculo resultan más sencillas y generales: manera verdaderamente peregrina de encarecer la importancia del Algebra: confesando que sus símbolos, puesto que nada signifiquen, en cambio sirven de mucho; y con gran verdad acaso, porque nada puede decir tanto como lo que no dice nada. Y peor fuera, bien mirado, que á esos símbolos correspondiera de hecho su aparente signi-

ficacion; pues si las operaciones hubieran de aceptarse en el sentido lato que el Álgebra ofrece, si por ejemplo, por *suma* debiéramos darnos á entender no solo aquella con la cual se acrece porque únicamente comprende datos positivos, sino tambien aquella con la cual se amengua porque envuelve datos de una y otra índole, ¿qué sería del axioma: el todo es mayor que la parte? No cambiando el nombre á la operacion, no habría por qué cambiárselo al resultado, y si este en un caso se llamaba todo, ¿por qué no en otro? Luego el todo pudiera ser menor que la parte.

¡Símbolos sin sentido: hé ahí el Álgebra! Pero ni aun de ese modo se salvan las inconsecuencias de los matemáticos: la adición nunca conduce á un resultado de índole en los datos no impuesta; mas la multiplicación, caso particular suyo segun pretenden, lleva á resultados de distinta naturaleza: como que el producto de dos factores lineales engendra una superficie; el de tres un sólido; el de cuatro y de más, no se sabe todavía qué, pero algo seguramente que á los datos no se parece: y ello es tan cierto que un cálculo de números no se transforma en otro de cantidades sin ciertas correcciones con sujeción al llamado principio de homogeneidad. Así, siempre discurriendo entre la vaguedad y la contradicción, no es extraño que lo negativo dejara un día en suspenso á los matemáticos y hoy lo imaginario los absorbe y preocupe: al cabo convendrán en que no sin-sobra de razón notaba Kant que como en actos públicos se disputara sobre Matemáticas, segun en otras ciencias se practica, mucho tendrían que sentir los geómetras.

Tal cuadro, nada halagüeño, desplegarán quiénes se propongan deprimir la excelencia de las Matemáticas. Mas es el caso que, aun dando por plenamente concedido, como desde luego me mostré pronto á hacerlo, cuanto sustancial en esas recriminaciones se encierra, las ciencias exactas no sufren desdoro alguno. Que no se han librado del error, sea: que se han visto envueltas en contradicción, sea tambien. ¿Pero de ahí se quiere argüir que tienen en su origen turbulencia y cieno, y que sus progresos son un tanto ilusorios? Pues todo lo contrario.

Si acerca de las operaciones fundamentales se han vertido conceptos equivocados, como en efecto ha sucedido, porque la multiplicación y elevación á potencias no son operaciones de composición ni agregación, y la división y extracción de raíces no lo son de descomposición ni disgregación, y ni el producto ni el cociente ni la potencia ni la raíz son de otra índole que los datos, todo ello proviene de que cual si para causar la admiración de la mente humana no fuera bastante á las Matemáticas con la certeza de sus principios y la lógica de sus discursos, propendía gran parte de los que estas ciencias cultivaban ó exponían, acaso sin repararlo, á seducir tambien á la inteligencia con la viva claridad que ostenta el mundo de los sentidos: afán peligrosísimo, porque la idea de cantidad tiende de tal modo en su desenvolvimiento á elevarse sobre toda intuición, en que floten datos de experiencia, aunque bajo las formas más ricas de ser sea allí realizable el conocimiento, que bien claramente indica que antes de toda sensación habia en esa idea, como virtual ó latente, un organismo propio que á semejanza del mecanismo de un reloj, no aguardaba más que un impulso en la péndola para latir y sonar. En verdad la estatua que Condillac imaginaba, aspirando ideas por los sentidos, hubiérase visto condenada á no ser, con solo trasformar sensaciones, ni Newton ni Leibnitz ni Laplace, pues en el campo matemático el sensualismo no encuentra como quiere una precisión segurísima en premio de una palpable evidencia. Esa noción que por tan ejemplar se tenia, la de la pluralidad ofrecida en el espectáculo del mundo por objetos semejantes, distintos en posición, era el aspecto más mezquino bajo el cual la cantidad se manifestaba, y la ciencia matemática habia por fuerza de hallar pronto oscuro su camino á la luz de un modelo de resplandor tan engañoso.

Mal destacado, por su influjo, el número de la cantidad, habia dado ocasión á dudar de si la unidad era ó no un número, no advirtiéndose que andaba confundido el uno con la unidad, la cual en efecto no es un número así como el uno sí lo es; y en la confusión de esos conceptos aparentaba el cálculo simplificaciones que realmente, tratándose de cantidades, no ocurrían: de lo cual ejemplo se veia en la Trigonometría, cuando no bien se-

ñalada la distincion entre las líneas *toxométricas* (medidoras de arco) y los números *gonométricos* (medidores de giro), juzgábase que la adopcion del rádio por unidad, daría mayor sencillez á las fórmulas; como si la unidad, á semejanza del uno, pudiera desaparecer de un cálculo, al menos en los casos que solian suponerse.

Algo tambien velada, de resultas de ese mismo influjo, la índole de la multiplicacion y division, no se echaba de ver con claridad bastante que el producto y el cociente siempre habian de ocupar, aquel el cuarto lugar y este el tercero de alguna proporcion cuyos cuatro términos serian las más veces cantidades todas homogéneas, y cuando nó, lo serian á su modo las dos primeras y á su modo las dos últimas, figurando en todos casos como primer término la unidad, no el uno: de donde debiera colegirse que ni se multiplicaria ni dividiria en ocasion alguna una cantidad por otra sino por la razon de otras dos, la cual es un número.

Y corrida asimismo la penumbra de la equivocacion hasta la evolucion potencial de una cantidad y hasta su involucion radical, tampoco era manifiesto que en ellas solo un término, el que respondiese á la potencia fundamental, debia de considerarse como cantidad y el resto de la evolucion ó involucion como puro número.

Más hé ahí todo el alcance del error en los principios de la ciencia: cuando parecian mostrar su turbio naciementó, descubren por el contrario la clara fuente en que bebe la certidumbre matemática: la idea trascendental rehuye como origen la representacion sensible y se remonta á otro más puro manantial.

II.

La contradiccion á su vez tan no humilla á las Matemáticas que bien puede afirmarse que sin incurrir en ella (y acaso si no arrebatara á la Aritmética el vuelo poderoso del Algebra, no fuera tan imperiosa la necesidad de pasar por semejante extremo) la ciencia de los números ignoraria todavía el sentido propio de sus operaciones. Porque léjos de haber mero artificio en el formulismo algebraico, se encuentra en él una profundidad que asombra, y cuanto más confunde, más esclarece. De tan inestimable precio son todos y cada uno de esos símbolos, tan extraños al parecer, que aun cuando el Algebra hubiera servido no más que para hacer girar el discurso matemático sobre la nocion de lo negativo y la del exponente fraccionario, habria bastante para declararla hija predilecta del pensamiento, ya que con tan seguro paso se encaminaba á descubrir en la mente las formas típicas del desenvolvimiento de la idea de cantidad.

Y justo es rendir aquí homenaje á la memoria de un gran pensador. Rey Heredia no acertó en todo: divagó (errores procedentes de otros le inducian con fuerza á ello) al definir la multiplicacion y division: extravióse tambien en la interpretacion de las síntesis, y de las síntesis de síntesis; pero, con todo, su *Tratado trascendental de las cantidades imaginarias* le honra sobremanera y le señala un puesto envidiable en la historia de la renovacion matemática. Profunda inteligencia revelaba quien sentia el firme convencimiento de que las extrañas consecuencias del cálculo debian de conservar tan impreso el sello de las propias maneras de conocer del pensamiento que la aclaracion de los misterios algebraicos no se haria al cabo sino por confirmacion de principios de la mente, y nada importa que al dirigir la ciencia por ese camino, no llegara, con la aplicacion del sistema de Kant, á redondear la explicacion: allí, en la filosofía, estaba el secreto, y solo señalarlo, cuanto más convirtiendo á conseguirlo ingeniosos esfuerzos, es para Rey un timbre de gloria. Razon tambien tenia al pretender que como más cercana á la Metafísica, en principios fundamentales acerca de la índole de las operaciones, fuese el Algebra la llamada á dar copiosa luz á la Aritmética que ninguna ó muy escasa podia arrojar sobre aquella. La Aritmética, en efecto, tuvo ante sí la clave de sus trabajos y resultados desde que medio aturdida y sin acertár en mucho tiempo á ver por completo, oyó decir al Algebra: *restar es sumar, dividir es multiplicar, extraer raíces es elevar á potencias*.

¡Extraña advertencia al parecer! y sin embargo cuando, como en el campo de la cantidad pura acontece, no debe de haber motivo para que un aspecto se prefiera á otro, la ciencia no puede por menos, en su progreso, de hacerlos girar en torno de su punto de oposicion y, cambiando su ser respectivo, mostrarlos distintos y confusos. En esas regiones abstractas en que el anverso y el reverso de las cosas no tienen razon alguna de permanencia, en que el anverso es tambien reverso, porque es el reverso del reverso, libre el pensamiento, escoge la posicion que le place: su aquí y su allá se transforman en allá y aquí; y en su ir y venir, todo es ir y todo es venir. Si un aspecto parece tético (que alguno ha de considerar primero el pensamiento al comenzar á desenvolverse), el antitético que aparece enfrente, el pensamiento lo alcanza y lo torna aquel: entonces abarca ambos bajo una síntesis que á un tiempo dá cuenta de su oposicion estática y de su confusion dinámica: entonces, por decirlo así, como que se oscurece el *sistema* de ambos aspectos al par que se destaca brillante su *centro de gravedad*. Y eso precisamente ha sucedido con las operaciones fundamentales del cálculo.

La idea primera de suma habia sido la de una composicion que aumentaba la cantidad: frente á ella estaba la sustraccion como una descomposicion que la disminuía: ambos aspectos parecian irreconciliables. Pero ¿descomponer no era tambien componer? Era deshacer una composicion para formar otra. Luego si la segunda con respecto á la primera reputábase descomposicion, la primera con respecto á la segunda debia juzgarse lo mismo. Así enfrente de la suma tética que aumentaba se echó de ver la suma antitética que disminuía, y ambas fueron conciliadas en la suma sintética. La adiccion y la sustraccion perdieron entonces su valor como aspectos permanentes: en cambio quedó manifiesto el algoritmo de la *composicion* que Wronsky y Rey llamaron suma ó sumacion.

De la misma manera y por análogos pasos, la multiplicacion, aunque comprendida, no siéndolo, en las operaciones de composicion, respondió primero en el fondo á la idea de modelar agrandando: frente á ella, la division servia para modelar reduciendo. Pero lo arbitrario de semejante distincion comenzó á hacerse sentir, y una y otra vez la division se impuso como multiplicacion, y la multiplicacion como division, hasta que en fuerza de confundirse mutuamente, quitaron todo valor á sus primitivos aspectos, poniendo entonces patente el algoritmo del *modelado* que Wronsky y Rey llamaron reproduccion ó produccion.

Por principio y progreso parecidos, la elevacion á potencias se ostentaba primero como una evolucion segun exponente entero y enfrente aparecia la extraccion de raíces como una involucion tambien segun exponente entero. Pero tal desenvolver y tal envolver eran modos que no subsistian sino por su oposicion, y como en el fondo todo ello era graduar, frente á la potencia evolutiva surgió la involutiva. El exponente fraccionario pasó á afectar á la potencia, no por convenio, no por razon de utilidad, sino por precepto ineludible de la lógica: la raíz pudo enunciarse como potencia, la potencia como raíz, y al gravitar ambas en torno de un símbolo comun, un tercer algoritmo se destacó en el cálculo: el algoritmo de la *graduacion*, con este mismo nombre designado por Wronsky y Rey.

De tal manera, y por su propia virtualidad, el cálculo fué descubriendo sus fuerzas y afirmándose en su verdadero apoyo. Grande ya en el dia, comienza á dar de mano los cuidados de la adolescencia: modelando, graduando y por fin componiendo, en magnitud y modo la cantidad podrá variar, pero su índole no se altera: las advertencias del principio de homogeneidad son inútiles.

Mas para alcanzar estos puntos de vista que tan sencillos parecen ¡cuánto tiempo y fatiga no han sido menester! Desde la cumbre se domina bien el panorama; pero subir hasta allí es costoso y más de una vez ha sido tentado el que ascendia á volver atrás. Ese cuadro que á grandes rasgos acabamos de bosquejar, se ha desplegado con el trascurso de siglos y ¡qué admirable lucha la sostenida mientras tanto por el pensamiento! Ya antes de la invencion del Algebra, las nociones de la Aritmética habian sido conmovidas por la contradiccion: la cantidad fraccionaria y la incomensurable habian aparecido; pero el golpe de ariete lo recibieron del Algebra en la cuestion de lo negativo y lo imaginario.

En vano el entendimiento (*intelligentia*, como decía el filósofo Vico), contento con la luz que aun parecía despedir de sí la Aritmética fundada en la pluralidad, pugnaba por colocar la operación directa en un aspecto determinado: el pensamiento (*cogitatio*, como decía el mismo filósofo), impulsando al Algebra, le llevaba tenazmente á contemplar el aspecto contrario. Es absurdo, decía el entendimiento, y una y otra vez quería las cosas de aquella manera; pero una y otra vez tornaba el pensamiento á mostrárselas de la manera opuesta. ¿No es bastante, exclamaba aquel, tratando de apartar de sí tales fantasmas engendrados por el inflexible razonamiento, haber admitido lo fraccionario y lo incomensurable? ¿hé de concebir lo inconcebible? En lo negativo y en lo imaginario no cabe operación directa: esos aspectos no existen en la cantidad. ¿Por qué no? replicaba el pensamiento: no existen porque no existían, y no existían porque no se veían: hé ahí todo; pero ello era natural. Cuando un camino se recorre á partir de un punto, siempre en un mismo sentido ¿se vé acaso lo que al partir se deja detrás? Es menester para ello que desde algun sitio se retroceda, y ya de frente al punto de partida, en llegando á él, se siga, en ese mismo sentido de retroceso, más allá: entonces será cuando, viendo lo que ya había á este lado, se caerá en la cuenta de que si por aquí se hubieran encaminado los primeros pasos, aquello y no esto habría sido lo que no se hubiera supuesto que existía.

Así hubo al fin de hacerse y la mudanza de aspecto alcanzó á todo. Si cambiando la *unidad de magnitud* se conseguía que dos cantidades que al ser medidas requerían, la una solo desplegar la unidad y la otra en parte plegarla, requiriesen lo contrario; y que otras dos que exigían, la una plegar la unidad con cuento y la otra sin cuento, exigiesen también lo contrario; y de esta manera, desde lo fraccionario como tético, lo entero era lo fraccionario, y desde lo incomensurable como tético, lo comensurable era lo incomensurable; análogamente, cambiando la *unidad de modo*, desde lo negativo como tético, vióse en tiempo de Descartes que lo positivo era lo negativo; y desde lo imaginario como tético, se ha visto en esta nuestra edad que lo real es lo imaginario.

Pero tan completa mudanza en la manera de ver, así realizada por el progreso matemático, se encierra en una fórmula que acaso el rumbo tomado por el discurso haya hecho presentir. Si el ser las cosas de una manera lo expresáramos por *ser*, y el ser estas cosas no de otra cualquier manera distinta, sino de la manera enteramente opuesta, por *no ser*, ¿no diríamos con verdad y en esa forma concisa que tanto agrada á los filósofos como á los matemáticos, que las ciencias exactas, ciencias por su índole esencialmente abstractas, han progresado, á semejanza del tiempo en que «lo que ayer fué mañana, mañana se dice ayer,» cada vez que reconociendo, por el movimiento dialéctico de la idea, lo indiferente ó convertible del aquí y del allá, han podido exclamar *SER ES NO SER*? Pues hémos con esto en plena filosofía de HEGEL, fundando el progreso en la contradicción primero sostenida, mas luego borrada por el desenvolvimiento de la idea.

¡Y qué mucho que un sistema idealista resulte confirmado por una ciencia en que la idea pura domina en absoluto! Bien sé que apenas si es dado en filosofía pronunciar un nombre grato á todos. La verdad es tesoro tan codiciado que los que á alcanzarla creen haber dirigido más seguramente sus pasos, ven con marcado ceño que otros pretendan que no es aquel sino otro el camino más adecuado, y la disputa se entabla con menos apacible espíritu del que fuera menester para llegar á entenderse. La escuela ya conocida y reputada no quiere conceder que la nueva sirva de algo: en cambio esta suele desquitarse negando que aquella haya servido de nada. Balmes, en quien la afición á los escolásticos no fué parte á que diera al olvido lo mucho que las ciencias debían á otros que no pensaron como ellos, decía, queriendo defender al que había conmovido la filosofía con la duda metódica. «Descartes se encontró en el caso de todos los reformadores. Están dominados de una idea: y la expresan tan fuertemente que al parecer no consienten otra á su lado. Todo en su lenguaje es absoluto, exclusivo. Prevén la lucha que habrán de sostener, quizás la experimentan ya, y así concentran toda su fuerza en la idea cuyo triunfo se proponen, y llegan á perder de vista todo lo que no es ella. No se puede inferir que el reformador no tenga otras que modifiquen notablemente la principal; mas para hacer

frente á sus adversarios que le dicen: «esto es absolutamente falso» él dice «esto es verdadero absolutamente.» La historia y la experiencia nos presentan innumerables ejemplos de estas exageraciones. La idea dominante de Descartes era «arruinar la filosofía que á la sazón reinaba en las escuelas, y daba el impulso tan fuerte que hacia temblar el mundo.»

Esta advertencia, autorizada por filósofo tan ilustre como Balmes, encierra mucha verdad y debiera no ser perdida para los partidarios de unas y otras escuelas que, más justas y prudentes, harían bien en no negarse los méritos que de derecho les correspondan. Cuando merced á los principios ó método de alguna, ha adelantado el espíritu en tal ó cual ramo del saber, fuerza es estarle agradecidos y conceder que ella mejor que las precedentes servía para aquel objeto. No en manera alguna cabe decir que la filosofía del Angel de las Escuelas, allá en la Edad Media, no redundó en grande adelanto de la ciencia de Dios y de la ciencia moral; pero también es cierto que con la argumentación escolástica que, al aparecer el método de Bacon, regía en pleno dominio, las ciencias de la Naturaleza hubieran hecho menguados progresos, dado que hubieran hecho algunos, pues si para el adelanto de la Metafísica convenia dudar sábiamente, como despues propuso Descartes, para el conocimiento del Universo era indispensable observar con paciencia y experimentar con tino: faltaban hechos y sobraban silogismos. La gloria del Canciller en este punto es legítima. Pero á cada cual su vez. Cuando este método, al impulso de otros filósofos, penetre, bajo otra faz y otro nombre, en las ciencias divinas y morales, llevando á consecuencias desastrosas, tanto los que se inspiren en el escolasticismo antiguo como los que beban en el racionalismo moderno, harán bien en decir con dignidad: ese no es vuestro terreno; del mismo modo que cuando á fuerza de ergos sacados de quicio, se querria, siglos atrás, acallar el convencimiento de los sabios que, con la mirada fija en los cielos, se sentían rodar por el piélago del vacío, ellos replicaron oportunamente: «á las matemáticas se contesta con matemáticas.»

III.

Acaba de resaltar en el progreso matemático un principio de filosofía hegeliana, y la confirmación de otro se nos manifestará ahora con la generalización de un concepto, no ha mucho ligeramente indicado: el concepto de lo *imaginario*.

Como la manzana caída del árbol fué ocasión á la idea de la gravitación universal, así la interpretación del *raíz de menos uno* por la perpendicular ha sugerido una importantísima teoría, á cuya luz la ciencia no ha tardado en ver cuanta extensión, partiendo de otros puntos, le era permitido dar á sus miras. Principios alcanzados por sabios analistas, cual un portento del cálculo, que parecían como compendio admirable de la ciencia, sólo asequible sin duda allá en la cumbre, adonde para subir nadie se dispensaría de tiempo y cansancio, esa teoría ha acreditado que eran con todo, para alzar la construcción matemática, los cimientos más firmes y evidentes, confirmándose de este modo una vez más lo que con estas ó parecidas palabras habia dicho Condorcet: «repare quien niegue el progreso, ese hecho constantemente repetido en la historia, y vea cómo, el génio se adelanta á su época enunciando verdades que sus contemporáneos apenas comprenden, y cómo en el siglo siguiente esas mismas verdades son tenidas por tan comunes y triviales que nadie reputa á mérito el saberlas.» Y en efecto, el mismo Euler, asombro de sus coetáneos con fórmulas sublimes, quedaria pasmado al observar cuál el poderío del imaginario, misteriosamente revelado en aquellas sus consecuencias celebérrimas, hoy descendido de la cumbre, trae agitada y gozosa á la ciencia.

Porque el Algebra bate sus alas con brio dando bien á entender que, como fiel intérprete de la idea pura, su campo y su porvenir tienen, á semejanza del infinito, «el centro en todas partes y la circunferencia en ninguna.» Ya no basta á su generalidad la suma sintética que abrazaba lo positivo y lo negativo: se remonta á la suma compositiva, tan amplia que en ella cabe no solo todo lo real presente sino todo lo real futuro; y allí, con so-

brada razon, quiere ver una suma, donde se ofrezca un concurso de causas ó circunstancias aunadas para producir un efecto; y es una suma la resultante de fuerzas; y lo es tambien la trayectoria de un movimiento compuesto, de las trayectorias de los movimientos componentes. De ese modo, desde el todo tético, mayor en efecto que cada una de sus partes, el Algebra se eleva al todo compositivo que puede ser igual ó menor que cada una de ellas.

A su vez la Aritmética, cada dia más estrechamente abrazada al Algebra, hace dudar de si su complacencia en esta revelará el amor de la hija ó el cariño de la hermana pequeña: tampoco le basta la suma tética que llevaba su nombre: la ciencia de Fermat, Wilson y Gauss quiere tambien para sí la suma sintética y la suma compositiva.

Y por su parte la Geometría descubre más distintamente entre sus gérmenes primordiales la idea del movimiento: que si la Cinemática es una Mecánica sin fuerzas ostensibles, la Geometría es una Cinemática sin tiempo manifiesto. Verdad es que no le incumbe la velocidad con que los trazos componentes se describen, pero su situacion, proporcionalidad y aun efecto de concurso, sí corresponden á la hermosa ciencia de Euclides, de Pappus y de Chasles.

No conviene con todo en la obra del imaginarismo confundir el vuelo de la idea abstracta con el alcance de la representacion sensible. A impulsos del pensamiento la idea pura avanza siempre, arrollando todo impedimento. Que la imaginacion llegue ó no á iluminar el campo de las operaciones del Algebra, ésta no por eso duda ni vacila en la legitimidad de sus cálculos. Si el nuevo objeto de su trabajo es producto ineludible del movimiento dialéctico, el Algebra, denodada con su «no ser es ser,» comienza la construccion en la ribera de allá con tanta firmeza como en la ribera de acá. Pero el entendimiento no acepta con gusto lo que se le da sin representacion, y bajo este punto de vista la teoría del imaginarismo, no obstante su favorable influjo en el adelanto de la ciencia, aleja la dificultad, mas por completo no la desvanece. Sin duda la pone más allá; pero allí está, tan en pié como cuando estaba aquí. Porque es verdad que con las componentes y resultantes se remueve el obstáculo en las funciones de una variable independiente, que como tales pueden señalar su fisonomía sobre un plano; y es verdad que tambien se le salva en las funciones de dos variables independientes, para las cuales hay representacion en el espacio, pero á estas funciones siguen las de tres, cuatro y más variables, y el imaginarismo nos acompaña como el horizonte que nuestra manera de ser nos hace llevar siempre con nosotros por la redondez de la tierra.

Ni de otra manera debe suceder si, como todo parece indicarlo, halla en el progreso matemático entera aplicacion la TRILOGÍA no interrumpida de HEGEL, segun la cual la posicion de un término engendra la de su contrario que no se mantiene en oposicion con el anterior sino para al cabo fundirse con él, dando lugar á un nuevo término, tercero de esta primera série, primero de otra segunda, y así prosiguiendo. Tras de la posicion la negacion, y tras de esta la negacion de la negacion, los tres momentos en ese sistema se suceden de continuo, porque cuando el tercero reproduce el primero, es de una manera más completa y rica en determinaciones que da comienzo á otro movimiento más elevado que el precedente, y así por siempre, mientras cabe un más allá, constantemente sacudida la idea y forzada á desplegarse al impulso antitético, á semejanza del éter, por el universo derramado, que en su perenne convulsion tiñe los mundos de colores.

En el progreso matemático lo imaginario, entendido como lo no realizable en el orden de ideas últimamente adquirido, ocupa el segundo término de esa trilogía que va siempre avanzando. El orden de ideas poco á poco se eleva; mas una preocupacion invencible hace presuponer, cuando un problema se plantea, que puesto que los datos se ofrecen en el orden últimamente conocido, el resultado debe tambien obtenerse en el mismo orden, y como esto no todas veces es posible, la fuerza lógica del Algebra contraría á lo mejor el presupuesto involuntaria pero erróneamente formado, diciendo «no;» y ese «no» es lo imaginario que si bien se aleja, queda siempre á la vista como alentando á avanzar más.

Fué la pluralidad la primera nocion que en punto á cantidad se despertó en la mente

humana, y así fué la cantidad *entera* la primera de que se ocupó la ciencia; pero el término antitético quedaba engendrado y comenzó á desenvolverse; y ocurriendo una y otra vez, aquellas *minutiae*, que así llamaron los antiguos á las cantidades *fraccionarias*, hubo al fin que tomarlas en cuenta. Mas este aspecto no se mantuvo en oposicion con el anterior sino para luego fundirse con él, dando origen á un nuevo concepto: el de la cantidad *comensurable*: nueva afirmacion enfrente de la cual apareció nueva negacion: á la cantidad comensurable se opuso la incommensurable. ¿Qué era aquella raíz de una cantidad entera que no siendo entera, tampoco podia ser fraccionaria; ó de una cantidad fraccionaria que, no siendo fraccionaria, tampoco podia ser entera? Por de pronto un imposible, un absurdo; mas anduvo el tiempo y la diagonal del cuadrado y otras líneas pusieron de manifiesto que aquello que se suponía no existir, sin embargo existía; y reparando en el nuevo aspecto se echaba de ver que, bien mirado, lo incommensurable era tanto ó más probable que lo comensurable. El término antitético se fundió con el precedente y dió lugar á un nuevo concepto: el de la cantidad *positiva*: otra afirmacion enfrente de la cual apareció otra negacion. La cantidad *negativa* comenzó á dibujarse y las raíces *sordas* sembraron de dificultad las investigaciones algebraicas. ¿Qué, si no lo imposible ó absurdo, podian revelar tales raíces negativas, que no contestaban á la cuestion que se proponía? Pero apareció Descartes y esas raíces sordas no lo fueron tanto que no oyeran la voz del filósofo de inmortal renombre, que las llamaba á tomar parte en las combinaciones generales de la cantidad: lo negativo quedó conciliado con lo positivo: nació una nueva ciencia, la Geometría analítica: y nació tambien un nuevo concepto, el de la cantidad *realizable en línea recta*: otra afirmacion que suscitó en seguida otra negacion. La línea recta antitética, tan opuesta á lo positivo como á lo negativo de la primera ó tética, comenzó á destacarse. ¿Qué era aquella raíz de grado par de una cantidad negativa que no podia ser ni positiva ni negativa? Un imposible sin duda, un absurdo; mas el tiempo ha ido transcurriendo y Buée, Francois, Argand, Rey, Vallés, Houel y otros, uniendo todos sus valiosos esfuerzos en la gloriosa empresa, han ido venciendo el imposible y explicando el absurdo; y ya en el día la direccion *perpendicular* es otro modo de desenvolvimiento de la cantidad. Tal término antitético tampoco habia mantenido su oposicion con el precedente sino para al cabo conciliarse con él, dando origen á un nuevo concepto: el de la cantidad *realizable en todas las direcciones de un plano*.

«Es de creer, habia dicho con seguro presentimiento Rey, que suceda al fin lo que sucedió con las cantidades negativas que no eran menos aparentemente absurdas que lo son hoy las imaginarias. Si aquellas *duplicaron* el campo de las aplicaciones matemáticas, estas lo extenderán en *horizontes* inmensos y lo engrandecerán en *esferas* infinitas.» Y en *esferas de esferas*, debió añadir porque el movimiento dialéctico de la idea pura es infatigable.

En efecto: esa grandiosa tésis de la ciencia moderna tiene ya patente la antítesis: la *perpendicular al plano* es igualmente opuesta á todas las direcciones trazadas en él. Mas conciliado este término con el precedente, engendra un nuevo concepto: el de la cantidad *realizable en todas las direcciones del espacio*; y hémos ya en las esferas infinitas que Rey decia. Pero ¿alcanza con esto la idea la plenitud de su desenvolvimiento? No: la idea sigue su curso. ¿Y adónde nos conduce? ¿Qué sabemos! ¿Estaremos acaso á orillas de ese espacio de cuatro dimensiones que el ilustre Gauss esperaba ver realizado en la otra vida y que á otros grandes matemáticos tambien en el día preocupa?

«Es concebible, decia Rey, que una riqueza sensorial mayor que la humana ampliaria en nuevos órdenes de direcciones fundamentales esa intuicion inmanente y pura del espacio que es en nosotros el único campo, y como la forma única, en que nos pueden ser dados los objetos como extensos, como divisibles, como impenetrables, en fin, como cuerpos. La Geometría encerrada en la intuicion de espacio no es absoluta sino en cuanto es absoluta nuestra constitucion sensible, porque las cosas no son extensas en más ó menos dimensiones en sí mismas, é independientemente de nuestra forma de intuicion, sino cuando son puestas en relacion con nuestra capacidad ó receptividad, la cual, mientras

sea la que es nuestra constitucion humana, limita la intuicion del espacio, en el cual todo se da y se recibe con tres direcciones fundamentales.»

Lamennais habia ido más léjos. «Quizá, decia, para arruinar nuestra ciencia, bastaria una ligera modificacion en nuestros órganos: Quizá haya séres organizados de manera que estando sus sensaciones en oposicion con las nuestras, sea verdadero para nosotros lo que es falso para ellos y viceversa. Porque al fin, si bien se observa, ¿qué relacion necesaria se descubre entre nuestras sensaciones y la realidad de las cosas?»

Pero Balmes contestaba á Lamennais: Con un sentido más no sucederia «nada que destruyese la certeza de nuestros conocimientos ni alterase el órden ni la naturaleza de las ideas: no ocurriria otra novedad sino que sobre los muchos modos con que nuestra organizacion es afectada por los objetos, habria *uno más*. Nos sucederia lo que á un hombre que estuviese privado del olfató y se lo diesen de repente: tendria una sensacion más: nos sucederia lo que á un hombre en cuyo pecho brota de repente un sentimiento que antes no habia experimentado: tiene una afeccion más. Las nuevas impresiones se colocan en su puesto, y no destruyen ni alteran las otras.»

En el fondo esta observacion de Balmes encierra verdad. No serian conmovidos de resultas de la modificacion de nuestros órganos, los principios abstractos de las ciencias; pero de no contar nuestra mente sino con un reducido campo á las aplicaciones de esos principios, á poder ejercitarlos en otro sumamente vasto ¿que diferencia! El Algebra quedaria en pié aunque la Geometría desapareciera; pero quedaria como un escultór, con génio, pero sin mármol. En cambio ¿cuál no se manifestaria el poder del pensamiento que en el Algebra anida, si uná constitucion sensible superior á la nuestra le permitiera hallar piedra á mano en un espacio en que las cosas pudieran parecerse extensas en más direcciones fundamentales de las que hoy conocemos! Entonces sin destruir en nada la Geometría de dos ni de tres dimensiones, veriamos alzarse la de cuatro, rica, aun más que ellas, en formas y combinaciones.

¿Y esto al fin será hacedero? ¿O será más bien que asi como la nocion de pluralidad no alcanzó ha tiempo, con sus propias maneras de ser, á seguir el vuelo de la idea de cantidad, tampoco la de extension, no obstante su mayor riqueza en determinaciones, es capaz de seguir todo ese desplegarse y plegarse de la idea abstracta en la série indefinida de sus síntesis, y síntesis de síntesis, y otra intuicion, más completa que la del espacio, será la llamada á constituir el objeto de las investigaciones superiores de la ciencia? *La tierra inmensa*, como decia el viajero cartagines Hannon, cuando no conociendo lo que habia más allá, le era dado suponerlo todo. ¡Ancho campo hay aquí de conjeturas, y la mente humana, abrumada ante lo que sin duda le queda aun por recorrer, se siente momentáneamente abatida y tentada á decir «solo sé que nada sé.»

~~~~~

Pero atrae con demasiada fuerza á nuestra inteligencia su alto destino para que el descaecimiento un momento causado por su ignorancia relativa, dé otro fruto que el saludable de hacerla humilde sin amenguar en nada su generoso ánimo para seguir adelante. Mucho, es verdad, infinito falta aún que saber; pero algo seguramente se sabe, y á ello han contribuido no poco las ciencias matemáticas. Los siglos pasaban y absortos los hombres en la contemplacion de los fenómenos celestes, no cesaban de preguntarse el por qué del concierto de aquellas maravillas que parecian presenciar desde un suelo completamente inmóvil. Mas fueron sucesivamente Copérnico, Galileo, Kepler, Newton, Laplace, Schiapparelli, todos matemáticos, y quién reparando atentamente el curso de los astros, quién abismándose en profundos cálculos, fueron descubriendo grandes secretos, tales que al fin la humanidad, en el colmo de su asombro, hubo de exclamar:

¿Con que un lazo como de atraccion mútua sostiene en el espacio esas hermosas estrellas, y en alas de su misterioso recíproco impulso, magestuosamente se buscan y unas

por entre otras cruzan y difunden? ¿Y no menos sujetos á la universal propension, caminan tambien por entre los centelleantes cuerpos otros oscuros, brillando á veces con la luz que ellos les prestan; y ora luminosa, ora oscura, una y otra materia se halla con tal profusion esparcida por el universo, que apenas si es dado á uno de sus cuerpos comenzar su giro en torno de otro que como de mayor masa le rinde y avasalla, sin que á poco atraccion distinta, crecida por más breve distancia, convierta su rumbo hácia otro centro; y así de continuo fluctúe y vague, como quien, por contraria causa, al hender apiñada multitud, con el incesante codear de la gente, de uno en otro punto llevado, todos los recorre sin nunca precisar su ruta? ¿Así obedeciendo á ese incansable difundirse de unos sistemas de cuerpos por entre otros, á ese traerse y llevarse de unos mundos á otros, el sol con su corte de planetas y estos con la de sus satélites, caminan hácia region desconocida, y el cometa, emigrando de apartados confines, navega por el piélago de la inmensidad, y cual si costeara ideal continente, dobla el sol como cabo y siguiendo por el otro lado la imaginada costa, se aleja y pierde de vista en mares ignorados? ¿Así tambien esos cuerpos que al atravesar nuestra atmósfera se encandecen, esas estrellas no bien vistas cuando desaparecidas, que á no brillar, aunque menos numerosas, todas las noches, segun el tropel con que en algunas se las vé cruzar, hicieran creer que su condicion especial las impelia á buscar, como á las aves pasajeras en nuestro suelo, á ellas allá en el firmamento, espacios mejores; esos otros cuerpos tambien fugitivos, cuyo mayor volúmen y más lento paso, nos deja admirar el trazo descrito en la altura por su globo de fuego y su repentino desaparecer ó estallar; y esas piedras caidas, con espanto de las gentes sencillas, todo ello, *estrellas fugaces, bólidos y areolitos*, tendrá acaso el mismo origen que los cometas, y seria un tiempo nube de corpúsculos que bogaba remota por los confines del Universo, mas luego fué lentamente acercándose al astro, señor de nuestro sistema, y ya próxima y como fascinada por la atraccion creciente, atropellándose como corriente de agua al llegar á estrecho azud, desfiló en raudo rio: no tanto ni tan unido quizá que en vez de huir todo él, ya doblado el curso en torno del sol, á otras distantes regiones; sojuzgada una parte por el avasallador influjo, su no interrumpido movimiento, replegado hácia el centro poderoso, acabó por formar un anillo de corpúsculos, ya por tiempo durable contado en los dominios solares y destinado á arrojar sobre la faz de los planetas, cuando cerca de él caminaran, muestras de los materiales con que los cielos fueron fabricados? ¡Mensageras celestes esas piedras meteóricas caidas en nuestro suelo despues de filtrarse por entre millares de mundos, bien asi como la gota de lluvia cae al pié del árbol abriéndose paso por entre las hojas de la frondosa copa!

¡Y son las ciencias exactas las que hacen hablar de ese modo: ellas tan propias para explicar secretos de la *mente humana* como maravillas del Universo, obra como aquella de la *Mente Divina*! ¡Con cuánta verdad el fundador de la famosa Academia ateniense, queriendo que allí con más conocimiento de causa, se admirara á Dios y se comprendiera al hombre, habia escrito sobre la puerta:

NO ENTRE AQUÍ QUIEN NO SEPA GEOMETRÍA!