ESCHER'S LIZARDS

LES LÉZARDS D'ESCHER

H.S.M. Coxeter
Department of Mathematics
University of Toronto
Toronto, Ontario
Canada M5S 1A1

ABSTRACT

M.C. Escher visited the Alhambra in 1922, when he was 24, and was fascinated by the intricate symmetry of the decorations painted by the Moors who, strictly adhering to the Second Commandment, used only abstract motifs. Free from such restrictions, Escher enjoyed filling the plane with replicas of recognizable creatures such as birds, fishes and reptiles, leaving no gaps between them. One of his patterns of lizards, in which 4 colours are permuted by the 'octic group' $\mathfrak{D}_4$, is so subtle that I described it incorrectly in my talk on *Coloured Symmetry* [4, pp.15-33; 7, p.64]. The correction of this error (which nobody noticed) provides an opportunity for a brief survey of the theory, and a comparison of the two notations $G/G_1 \cong \Gamma$ and $[G : H] = N$. Professor J.J. Burckhardt has pointed out that there is also a historical error on page 21. The 80 dichromatic space groups that leave one plane invariant were recognized by Heinrich Heesch in 1928, eight years before Woods. For the whole story, as told by H.G. Bigalke, see H Heesch, Gesammelte Abhandlungen (Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth, 1986), pp. II-III.

RÉSUMÉ

M.C. Escher a visité l'Alhambra en 1922, alors qu'il avait 24 ans ; il fut fasciné par la symétrie intriquée des décorations peintes par les Maures qui, appliquant de façon stricte le second commandement, n'utilisèrent que des motifs abstraits. Libre de telles restrictions, Escher aimait remplir le plan à l'aide de répliques de créatures reconnaissables comme des oiseaux, des poissons et des reptiles, sans laisser d'espace entre eux. L'un de ses motifs de lézards, dans lequel 4 couleurs sont permutées par le «groupe octique» $\mathfrak{D}_4$, est tellement subtil que je le décrivis incorrectement dans mon exposé sur la symétrie de couleur [4, pp.15-33; 7, p.64]. La correction de cette erreur (que personne n'avait relevée) donne l'occasion d'une brève présentation de la théorie et d'une comparaison des deux notations $G/G_1 \cong \Gamma$ et $[G : H] = N$. Le professeur J.J. Burckhardt a signalé la présence d'une erreur de nature historique à la page 21. Les 80 groupes d'espace dichromatique laissant invariant un plan ont été reconnus en 1928 par Heinrich Heesch, précédant de huit ans Woods. Pour connaître toute l'histoire telle que racontée par H.G. Bigalke, on peut consulter H. Heesch, Gesammelte Abhandlungen (Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth, 1986), p. II-III.

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

1. *INTRODUCTION*

Escher's fondness for lizards possibly began in 1924, when he wrote to his friend Jan van der Does de Willebois about his observation of a pair of these reptiles courting and mating: "An enormously fat and beautiful gentlemen-lizard, speckled green, black and white, lay basking in the sun when a small slim grey lady-lizard came slipping coquettishly from under the dry leaves..." [1, p.26].

In his essay of 1957 on *The regular division of the plane* [1, p.162] he wrote, "Try as I will, I cannot accept that something as obvious as making adjacent figures recognizable and giving them a meaning... has never occurred to anyone but myself." In fact, his doubt was almost justified, because the Austrian artist Kolo Moser seems to have anticipated him by nearly forty years: Moser's fabric design of black and white swans ("Vogel Bülow" fabric sample, 1899, Oesterreichisches Museum für angewandte Kunst, Vienna) uses the same symmetry type **pg/pg** $\cong \mathfrak{C}_2$ as Escher's "Ferocious dogs" [8, Plate 18]. However, on close scrutiny one sees that each of Moser's swans is partially hidden behind a swan of the opposite colour, and there are strips of white or black background, whereas in Escher's case every point of the plane belongs either to a dog or to the common outline of two neighbouring dogs of opposite colours. (**pg** is the group generated by two parallel glide-reflections.)

2. *THE* $G/G_1 \cong \Gamma$ *NOTATION*

The underlying symmetry of such a coloured pattern can nearly always be specified by an "equation" $G/G_1 \cong \Gamma$, where G is the symmetry group ignoring the colours, G_1 is the normal subgroup preserving *all* the colours, and the quotient Γ is the finite group that *permutes* the colours [2, p.329; 3, p.457; 4, p.23; 6, p.408; 7, p.64]. For instance, **Figure 1** is Escher's famous lithograph *Reptiles* [1, p.284, No.327, reproduced on a larger scale on the book's jacket]. In the 2-dimensional part of this picture we see a

1. *INTRODUCTION*

Le penchant d'Escher pour les lézards commença possiblement en 1924, lorsqu'il écrivait à son ami Jan van der Does de Willebois à propos de son observation de la cour et de l'accouplement d'un couple de ces reptiles: «Un monsieur-lézard énormément gras et beau, tacheté de vert, noir et blanc, est étendu se dorant au soleil lorsqu'une petite et svelte madame-lézard grise sortit de sous les feuilles sèches et vint se coucher coquettement... » [1, p.26].

Dans son essai de 1957 sur *La division régulière du plan* [1, p.162] il écrivait: «Essayez comme moi, je ne peux accepter que quelque chose d'aussi évident que de réaliser des figures adjacentes reconnaissables et de leur donner une signification ne soit jamais venu à l'esprit de personne d'autre que moi-même.» En fait, son doute était presque justifié, car un artiste autrichien, Kolo Moser, semble l'avoir précédé par quelque quarante années: le design de tissu de Moser, des cygnes blancs et noirs, (échantillon de tissu «Vogel Bülow», 1899, Oesterreichisches Museum für angewandte Kunst, Vienne) utilise le même type de symétrie, **pg/pg** $\cong \mathfrak{C}_2$, que les «Chiens féroces» d'Escher [8, planche 18]. Cependant, un examen minutieux permet de voir que chaque cygne de Moser est partiellement caché par un cygne de la couleur opposée et qu'il y a des bandes de blanc ou de noir en arrière-plan, alors que dans le cas d'Escher tout point du plan appartient soit à un chien, soit à la frontière commune de deux chiens adjacents de couleurs opposées. (**pg** est le groupe engendré par deux réflexions glissées parallèles.)

2. *LA NOTATION* $G/G_1 \cong \Gamma$

On peut presque toujours spécifier la symétrie sous-jacente de tels motifs coloriés à l'aide d'une «équation» $G/G_1 \cong \Gamma$, où G est le groupe de symétrie qui ignore les couleurs, G_1 est le sous-groupe normal préservant *toutes* les couleurs et le quotient Γ est le groupe fini qui *permute* les couleurs [2, p.329 ; 3, p.457 ; 4, p.23 ; 6, p.408 ; 7, p.64]. Par exemple, la **figure 1** est la fameuse litho-

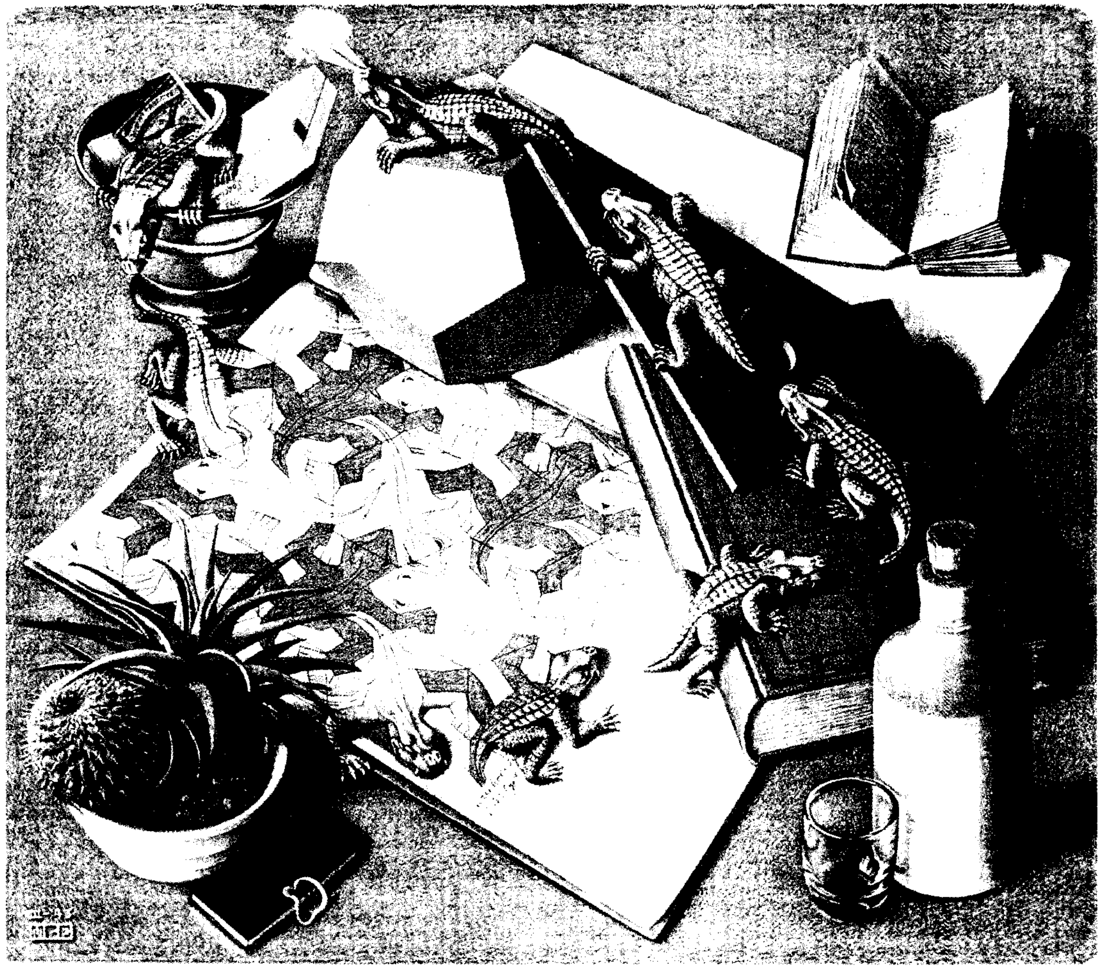

FIGURE 1

"Reptiles". A brief excursion from two dimensions to three. (Lithograph (1944) 343 x 464 cm)

«Reptiles». Une brève excursion de deux dimensions vers trois. (Lithographie (1944) 343 x 464 cm)

fragment of an infinite pattern of white, light grey and dark grey lizards, with symmetry type **p3/p1** $\cong \mathfrak{C}_3$. The group G = **p3** is generated by rotations through 120° about any two of three alternate vertices of a regular hexagon: one point near the right eyes of 3 lizards, another where 3 right "heels" come together, and the third belonging to 3 left "knees". Calling these 3 rotations S_1, S_2, S_3, we see that they satisfy the presentation

$$S_1^3 = S_2^3 = S_3^3 = S_1 S_2 S_3 = 1$$

or, eliminating S_3,

(1) $$S_1^3 = S_2^3 = (S_1 S_2)^3 = 1$$

[5, p.48]. The subgroup G_1 (which preserves the colour distinction) is the group **p1** generated by two translations, $X = S_1 S_2^{-1}$ and $Y = S_1^{-1} S_2$, which satisfy

$$XY = YX$$

[5, p.40]. For, $S_1 S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 = S_1 (S_1 S_2)^2 S_2 = S_1^2 S_2 S_1 S_2^2 = S_1^{-1} S_2 S_1 S_2^{-1}$. The quotient $\Gamma = \mathfrak{C}_3$ has the presentation

$$S_1^3 = 1,$$

which is derived from (1) by setting $X = Y = 1$ (that is, $S_1 = S_2$).

3. ESCHER'S 2-COLOURED PATTERN OF LIZARDS

Similarly, we see in **Figure 2** his pattern of yellow and brown lizards [8, Plate 24] for which the symmetry is

$$\mathbf{p4/p2} \cong \mathfrak{C}_2 .$$

The group **p4** is generated by rotations (through 90°) S_1 and S_2, which satisfy

(2) $$S_1^4 = S_2^4 = (S_1 S_2)^2 = 1 .$$

S_1 is a quarter-turn about the point where the right fore-feet of 4 lizards come together, while S_2 is a quarter-turn about the point where the left hind-feet of 4 lizards come together, one of the four

graphie d'Escher, *Reptiles* [1, p.284, n° 327, reproduit à une plus grande échelle sur la couverture du livre]. Dans la partie bidimensionnelle de cette image, on voit un fragment d'un motif infini de lézards blancs, gris pâle et gris foncé avec une symétrie de type **p3/p1** $\cong \mathfrak{C}_3$. Le groupe G = **p3** est engendré par des rotations de 120° autour de n'importe quel deux sommets parmi trois sommets alternés d'un hexagone régulier : un point près des yeux droits de 3 lézards, un autre à l'endroit où 3 «talons» droits se rencontrent et le troisième se situant au point de rencontre de 3 «genoux» gauches. Si on nomme ces trois rotations S_1, S_2 et S_3, on voit qu'elles admettent la présentation

$$S_1^3 = S_2^3 = S_3^3 = S_1 S_2 S_3 = 1$$

ou, en éliminant S_3,

(1) $$S_1^3 = S_2^3 = (S_1 S_2)^3 = 1$$

[5, p.48]. Le sous-groupe G_1 (qui préserve la distinction de couleur) est le groupe **p1** engendré par deux translations, $X = S_1 S_2^{-1}$ et $Y = S_1^{-1} S_2$, qui satisfont

$$XY = YX$$

[5, p.40]. Puisque $S_1 S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 = S_1 (S_1 S_2)^2 S_2 = S_1^2 S_2 S_1 S_2^2 = S_1^{-1} S_2 S_1 S_2^{-1}$. Le quotient $\Gamma = \mathfrak{C}_3$ admet la présentation

$$S_1^3 = 1,$$

qui est déduite de (1) en posant $X = Y = 1$ (c'est-à-dire, $S_1 = S_2$).

3. MOTIF BICOLORIÉ DE LÉZARDS D'ESCHER

De la même manière, on voit à la **figure 2** son motif de lézards jaunes et bruns [8, planche 24]; la symétrie est alors

$$\mathbf{p4/p2} \cong \mathfrak{C}_2 .$$

Le groupe **p4** est engendré par les rotations (de 90°) S_1 et S_2; elles satisfont

(2) $$S_1^4 = S_2^4 = (S_1 S_2)^2 = 1 .$$

FIGURE 2

Lizards of two colours. (From [8], Plate 24.)

Lézards de deux couleurs. (Tiré de [8], planche 24.)

lizards being the same in both cases. This group G = **p4** has a subgroup G_1 (of index 2) generated by half-turns about the centres of the rotations S_1, $S_1 S_2$, S_2, namely, the three half-turns

$$T_1 = S_1^2, \quad T_2 = S_1 S_2, \quad T_3 = S_2^2,$$

which satisfy the presentation

$$(3) \qquad T_1^2 = T_2^2 = T_3^2 = (T_1 T_2 T_3)^2 = 1$$

for **p2** [5, p.41]. The quotient $\Gamma = \mathfrak{C}_2$ has the presentation $S_1^2 = 1$, which is derived from (2) by setting $T_1 = T_2 = T_3 = 1$.

4. ESCHER'S 4-COLOURED PATTERN OF LIZARDS

Figure 3 is his more elaborate pattern of blue, yellow, green and red lizards [4, Figure 18 on p. 388], stylized in **Figure 4** by arcs of directed circles (because 4 lizards having the same colour chase one another in a cycle). In this case the appropriate symbol is

$$(4) \qquad \mathbf{p4} / \mathbf{p2} \cong \mathfrak{D}_4$$

(not **p4** / **p4** $\cong \mathfrak{C}_4$) because, although the **p4** (with colours ignored) still has the presentation (2), the subgroup **p2** (with colours distinguished) now has index 8. In fact, S_1 is a quarter-turn about the point A where the right elbows of 4 lizards come together, and S_2 about B, where the noses of 4 lizards meet the tails of 4 others. This group G = **p4** has a subgroup G_1 = **p2** generated by half-turns about the vertices of the triangle DAE (whose area is 4 times that of ACB), namely

$$T_1 = S_2^{-1} S_1^2 S_2, \quad T_2 = S_1^2, \quad T_3 = S_2 S_1^2 S_2^{-1},$$

which satisfy (3) again. The quotient Γ, derived from (2) by setting $S_1^2 = 1$, is now the "octic group" $\mathfrak{D}_4$, since it has the presentation

$$S_1^2 = S_2^4 = (S_1 S_2)^2 = 1$$

[5, p.6 (1.52)]. In terms of the colours

$$b = \text{blue}, \quad y = \text{yellow}, \quad g = \text{green}, \quad r = \text{red},$$

S_1 est un quart de tour autour du point de rencontre des pattes avant droites de 4 lézards, tandis que S_2 est un quart de tour autour du point de rencontre des pattes arrières gauches de 4 lézards, l'un des quatre étant le même dans les deux cas. Ce groupe G = **p4** possède un sous-groupe G_1 (d'indice 2) engendré par des demi-tours autour des centres des rotations S_1, $S_1 S_2$ et S_2, nommément, les trois demi-tours

$$T_1 = S_1^2, \quad T_2 = S_1 S_2, \quad T_3 = S_2^2,$$

qui admettent la présentation

$$(3) \qquad T_1^2 = T_2^2 = T_3^2 = (T_1 T_2 T_3)^2 = 1$$

pour **p2** [5, p.41]. Le quotient $\Gamma = \mathfrak{C}_2$ admet la présentation $S_1^2 = 1$, qui est déduite de (2) en posant $T_1 = T_2 = T_3 = 1$.

4. MOTIF 4-COLORIÉ DE LÉZARDS D'ESCHER

La **figure 3** est son motif le plus élaboré de lézards bleus, jaunes, verts et rouges [4, figure 18]; il est stylisé à la **figure 4** à l'aide d'arcs de cercles orientés (parce que 4 lézards de même couleur se poursuivent en un cycle). Dans ce cas, le symbole approprié est

$$(4) \qquad \mathbf{p4} / \mathbf{p2} \cong \mathfrak{D}_4$$

car, même si **p4** (où les couleurs sont ignorées) admet encore la présentation (2), le sous-groupe **p2** (où les couleurs sont distinguées) est maintenant d'indice 8. En fait, S_1 est un quart de tour autour du point A où les coudes droits de 4 lézards se rencontrent, et S_2 autour de B, point de rencontre des nez de 4 lézards et des queues de 4 autres. Ce groupe G = **p4** possède un sous-groupe G_1 = **p2** engendré par des demi-tours autour des sommets du triangle DAE (dont l'aire est 4 fois celle de ACB), nommément

$$T_1 = S_2^{-1} S_1^2 S_2, \quad T_2 = S_1^2, \quad T_3 = S_2 S_1^2 S_2^{-1},$$

qui satisfont encore (3). Le quotient Γ, dérivé de (2) en posant $S_1^2 = 1$, est maintenant le «groupe octique» $\mathfrak{D}_4$, puisqu'il admet la présentation

FIGURE 3

Lizards of four colours. (From "M.C. Escher's Universe of mind play", Fuji Television Gallery (1983), Tokyo, Plate E118, Michael S. Sachs Collection.)

Lézards de quatre couleurs. (Tiré de "M.C. Escher's Universe of mind play", Fuji Television Gallery (1983), Tokyo, Plate E118, Michael S. Sachs Collection.)

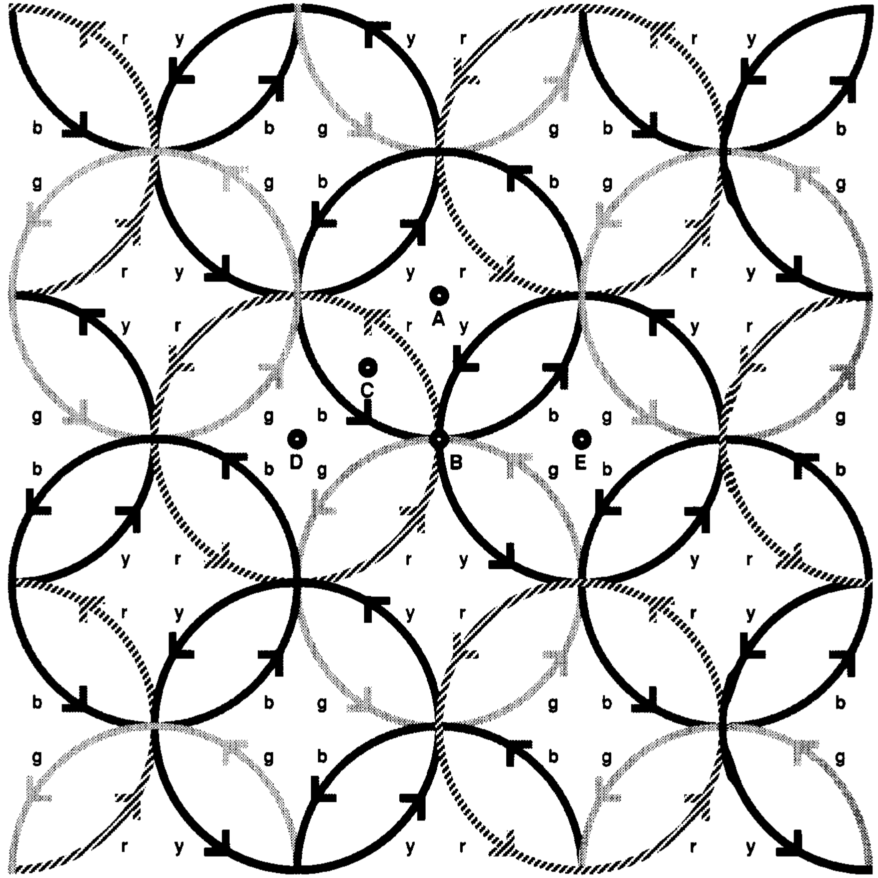

FIGURE 4

Processions of lizards, represented as coloured circles.

Défilés de lézards, représentés par des cercles de couleur.

REFERENCES / RÉFÉRENCES

[1] F.H. Bool, J.R. Kist, J.L. Locher and F. Wierda
M.C. Escher: His Life and Complete Graphic Work.
Harry N. Abrams, New York, 1982.

[2] H.S.M. Coxeter
The Seventeen Black and White Frieze Types.
C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 7 (1985), 327–331.

[3] H.S.M. Coxeter
A Simple Introduction to Coloured Symmetry.
International Journal of Quantum Chemistry, 31 (1987), 455–461.

[4] H.S.M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose and M.L. Teuber
M.C. Escher: Art and Science.
Elsevier Science Publishing Co., New York, 1986.

[5] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser
Generators and Relations for Discrete Groups.
(4th ed.), Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[6] D.W. Crowe
The Mosaic Patterns of H.J. Woods.
Comput. Math. Appl., 12B (1986), 407–411.

[7] Michele Emmer
"M.C. Escher: an Interdisciplinary Congress."
Structural Topology, 12 (1986), 61–65.

[8] C.H. MacGillavry
Fantasy and Symmetry – The Periodic Drawings of M.C. Escher.
Harry N. Abrams, New York, 1976.

[9] Marjorie Senechal
"Point Groups and Color Symmetry."
Z. Kristall., 142 (1975), 1–23.

[10] B.L. van der Waerden and J.J. Burckhardt
"Farbgruppen."
Z. Kristall., 115 (1961), 231–234.

this group $\Gamma = \mathfrak{D}_4$ is generated by the permutations

$$S_1 = (r\,y) \text{ and } S_2 = (b\,r\,g\,y)\,;$$

thus it is isomorphic to the symmetry group of a square whose sides bear these four colours (with green opposite to blue).

These remarks correct an error in [4, p.24], where the last three sentences of §5 should begin:

"Similarly, in addition to **p4 / p2** $\cong \mathfrak{C}_2$, there is **p4 / p2** $\cong \mathfrak{D}_4$ (Figure 18 = E 118)"

and then continue with the above explanation.

5. *THE* [G : H] = *N NOTATION*

Another notation sometimes used for coloured symmetry [9; 10] is [G : H] = *N*, where G is again the symmetry group ignoring the colours, H is the subgroup preserving **one colour**, and the index *N* is the number of colours. (When Γ is cyclic, the two notations scarcely differ: the symbol $G/H \cong C_N$ has essentially the same meaning as [G : H] = *N*. The distinction only becomes interesting when H is a non-normal subgroup of G.) In this notation, (4) becomes

$$[\mathbf{p4} : \mathbf{p4}] = 4$$

because the subgroup H (of G = **p4**) which preserves one colour (and incidentally also a second colour) is another **p4**. For instance, the **p4** generated by quarter-turns about the points *D* and *E* (in **Figure 4**) preserves yellow (and red) while interchanging blue and green.

$$S_1^2 = S_2^4 = (S_1\,S_2)^2 = 1$$

[5, p.6 (1.52)]. En termes des couleurs

$$b = \text{bleu},\ \ y = \text{jaune},\ \ g = \text{vert},\ \ r = \text{rouge},$$

ce groupe $\Gamma = \mathfrak{D}_4$ est engendré par les permutations

$$S_1 = (r\,y) \text{ et } S_2 = (b\,r\,g\,y)\,;$$

il est donc isomorphe au groupe de symétrie d'un carré dont les côtés présenteraient ces quatres couleurs (le vert s'opposant au bleu).

Ces remarques corrigent une erreur dans [4, p.24]; les trois dernières phrases du §5 devraient débuter ainsi : « De façon semblable, en plus de **p4 / p2** $\cong \mathfrak{C}_2$, on a **p4 / p2** $\cong \mathfrak{D}_4$ (figure 18 = E 118) » et continuer ensuite avec l'explication précédente.

5. *LA NOTATION* [G : H] = *N*

Une autre notation est quelquefois utilisée pour la symétrie de couleur [9; 10]. Il s'agit de la notation [G : H] = *N*, où G représente encore le groupe de symétrie qui fait abstraction des couleurs, H est le sous-groupe qui préserve **une couleur** et l'indice *N* est le nombre de couleurs. (Lorsque Γ est cyclique, les deux notations diffèrent à peine: le symbole $G/H \cong C_N$ a essentiellement la même signification que [G : H] = *N*. La distinction n'apparaît intéressante que lorsque H est un sous-groupe non normal de G.) Dans cette notation, (4) devient

$$[\mathbf{p4} : \mathbf{p4}] = 4$$

car le sous-groupe H (de G = **p4**) qui préserve une couleur (et de façon incidente une deuxième couleur) est un autre **p4**. Par exemple, le **p4** engendré par des quarts de tour autour des points *D* et *E* (à la **figure 4**) préserve le jaune (et le rouge) tandis qu'il interchange le bleu et le vert.