# Mosaicos

De la Alhambra a la sartén antiadherente

Antonio Gómez Tato

# Índice

**1. Introducción. 1**
1.1. Los mosaicos de la Alhambra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
1.2. Escher y la Alhambra . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

**2. Los mosaicos en matemáticas 3**
2.1. Embaldosado del plano por polígonos regulares . . . . . . . . . . 5
2.2. Otros polígonos que embaldosan . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
2.3. Mosaicos periódicos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
2.4. Mosaicos aperiódicos. Los mosaicos de Penrose . . . . . . . . . . 11
2.5. Los quasicristales y la sartén antiadherente . . . . . . . . . . . . 14

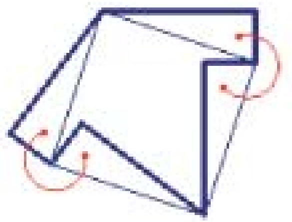
**3. Referencias 15**

# 1. Introducción.

Es sorprendente comprobar como el uso de figuras geométricas en el arte aparece en todas las civilizaciones. De entre todas, destaca la civilización árabe. Quizás la obligación, impuesta por el Corán, de no representar figuras humanas llevó a los árabes a perfeccionar el arte "geométrico" hasta niveles nunca alcanzados. Su apogeo coincide con la época de esplendor de la dinastía Nazarí en el sur de España, en el llamado reino de Granada. De aquellos tiempos, siglos XIII y XIV, nos han quedado grandes monumentos, entre los que destaca la Alhambra. Su arquitectura es relativamente pobre si se compara con la riqueza en la decoración de sus paredes y techos con motivos caligráficos y mosaicos geométricos. Éstos últimos serán nuestro punto de partida en el pequeño paseo que nos proponemos por el exuberante jardín de las matemáticas.

## 1.1. Los mosaicos de la Alhambra

Si buscamos en un diccionario, encontraremos que los mosaicos son dibujos o pinturas creados al introducir pequeñas piezas de vidrio, piedra o terracota en una base de cemento u otro material de fijación y que se han usado desde tiempos inmemoriales en la decoración de los suelos y paredes, tanto en construcción civil como administrativa o religiosa. Durante el imperio romano su uso estaba muy extendido. Entre mis recuerdos personales más vivos están las noticias que publicaba periódicamente "El Progreso"(diario de Lugo, mi ciudad natal) haciéndose eco del descubrimiento de un nuevo mosaico cada vez que se hacía alguna obra en las calles del centro de la milenaria ciudad, las mismas por las que yo paseaba. Estos mosaicos generalmente representaban escenas de la vida cotidiana con un colorido sorprendente y un nivel artístico muy alto. Sin embargo no es este el tipo de mosaicos que nos va a interesar. Los que encontramos en la Alhambra son un poco diferentes, están formados por piezas más grandes, con formas más regulares y no intentan reproducir una escena, sino repetir un patrón geométrico a lo largo y ancho de una pared. En el ejemplo que se muestra a continuación hay una pequeña figura poligonal, que se repite a lo largo del mosaico en diferentes posiciones.



Este esquema que se muestra a la derecha de la imagen, ha sido extraido de la página web del Instituto de Adormideras de la Coruña, en el que se pueden ver varios ejemplos y un resumen interesante sobre el tema de los mosaicos. El que esté interesado, puede verlo en:

http://www.edu.aytolacoruna.es/centros/iesadormideras/mosaicos/

Para construir la pieza, se parte de un cuadrado y se obtiene otro polígono de igual área, mediante el recorte de una o varias regiones y su recolocación como muestra el esquema anterior.

No todos los mosaicos de la Alhambra se han hecho según ese criterio, como se puede observar en los ejemplos que se muestran en la siguiente figura;

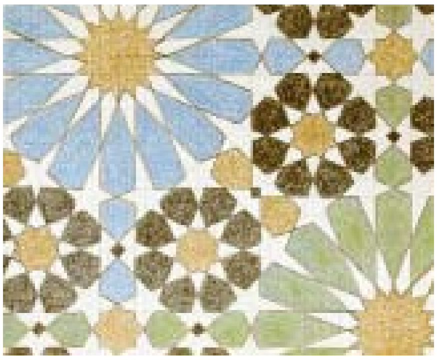
**Mosaicos de la Alhambra**

pero todos tienen un denominador común: se puede encontrar una pequeña región poligonal del mosaico que mediante traslaciones, giros y simetrías permite reproducir todo el mosaico. En matemáticas este tipo de mosaico se conoce como periódico. En el siglo XIX, Fedorov, un gran matemático ruso demostró que, según un criterio matemático que luego describiremos, sólo hay 17 tipos de mosaicos periódicos. La gran sorpresa ha sido comprobar que, si prescindimos del color, en la Alhambra están representados los 17 tipos. En otras palabras, los árabes encontraron el mismo resultado de forma empírica. Profundizaremos un poco más en el apartado 2.3.

## 1.2. Escher y la Alhambra

Evidentemente, la mayor parte de los visitantes de la Alhambra no van para buscar los 17 tipos de mosaicos, sino para apreciar la belleza de las composiciones. De entre todos estos turistas hubo uno muy singular: hablamos del gran pintor y grabador holandés Escher quien en busca de inspiración visitó la Alhambra en varias ocasiones, en el primer tercio del siglo XX. Escher nos ha legado los más asombrosos mosaicos jamás creados gracias a la comprensión de la geometría subyacente en los mismos y, por supuesto, a su intuición artística

M. C. Escher, Holanda 1898-1972



Notas de la Alhambra, Escher 1936

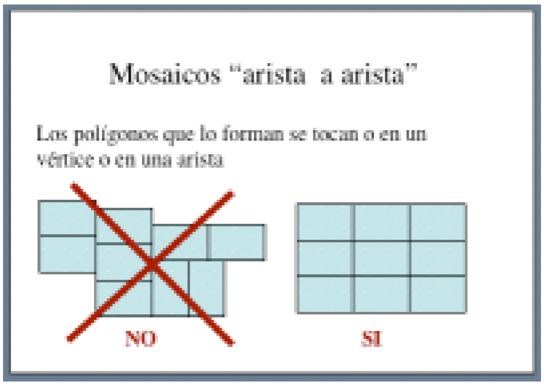
A diferencia de los mosaicos de la Alhambra, Escher usa imágenes de seres vivos en los suyos. Además busca el contraste no sólo con los colores sino también con los conceptos. En su estudio del concepto de infinito introduce mosaicos en la geometría no euclidiana. Es famoso por sus trucos visuales y sus imágenes impactantes. Vemos a continuación una pequeña muestra de los mismos.

# 2. Los mosaicos en matemáticas

Continuemos nuestro paseo poniéndonos de acuerdo sobre lo que es un mosaico.

**Definición.** *Un mosaico o embaldosado del plano es una descomposición del mismo en regiones (teselas), generalmente poligonales, que no se solapan.*

¿Cómo podemos empezar su estudio matemático? ¿Qué haríamos en la vida cotidiana? Etiquetarlo: bonito o feo, muy colorido o no, ... y después guardarlo en nuestra memoria si nos parece interesante. No es extraño entonces que en matemáticas se haga lo mismo, pero con otras criterios. Etiquetar en términos matemáticos es clasificar (evidentemente siguiendo criterios matemáticos) y para ello necesitamos imponer ciertas restricciones sin las que la tarea sería imposible.

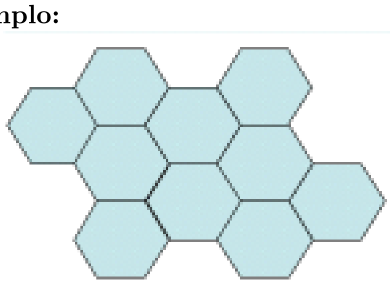



Por ello, nos vamos a interesar, a partir de ahora, sólo por **embaldosados mediante regiones poligonales arista a arista**, es decir, dos cualesquiera de los polígonos que forman el embaldosado, comparten o bien un vértice o bien una arista completa o bien no comparten nada.

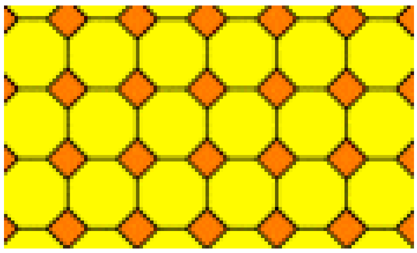
Entre los polígonos que forman parte de un embaldosado, hay muchos que son "congruentes", es decir: son los mismos pero trasladados o girados. A estos polígonos que sirven de "modelo"de las teselas se les llama "prototeselas".

**Definición.** *Un mosaico se llama monoedral, diedral, etc. según se pueda obtener una colección de 1, 2, etc. prototeselas.*

**Ejemplo:**



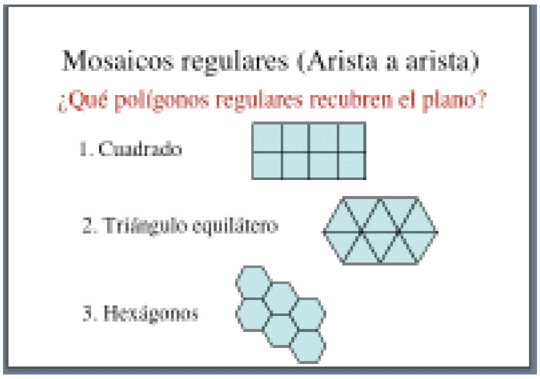
Mosaico monoedral



Mosaico con dos prototeselas

Si $T$ es una prototesela de algún mosaico monoedral, diremos que $T$ embaldosa el plano. Por ejemplo, los cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares embaldosan el plano.

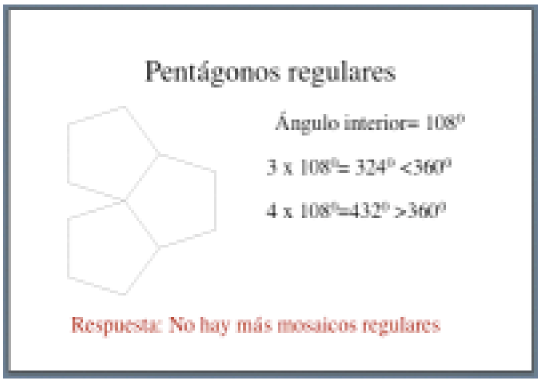
## 2.1. Embaldosado del plano por polígonos regulares




**Definición.** *Un embaldosado monoedral se dice regular si sus prototeselas son polígonos regulares.*

Los embaldosados regulares son muy fáciles de clasificar, sólo hay tres polígonos regulares que embaldosan: cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares.

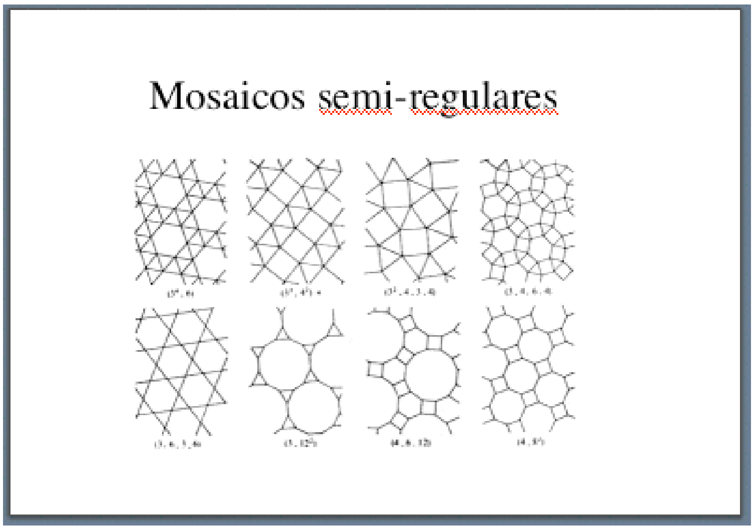
El pentágono regular no embaldosa. Sus ángulos interiores son de $72^{\text{O}}$ y $360^{\text{O}}$ no es múltiplo entero de 72. Con tres pentágonos en un vértice no recubrimos un entorno de ese punto y no tenemos espacio para meter otro más. Los polígonos regulares de más de 6 lados tampoco embaldosan.




**Definición.** *Un embaldosado se dice semi-regular si sus prototeselas son polígonos regulares.*

Para clasificarlos se necesita imponer una restricción. En cada vértice hay que tener el mismo tipo, es decir: la colección de polígonos que concurren en un vértice no sólo es la misma en todos sino que tienen que aparecer en el mismo orden cíclico. Por ejemplo si un vértice es compartido por dos hexágonos y dos triángulos, eso sucederá en todos los demás vértices y además si en uno aparecen intercalados, es decir hexágono, triángulo, hexágono, triángulo, esa misma relación de posición tiene que darse en los demás vértices. El alumno interesado puede formalizar matemáticamente esta afirmación.

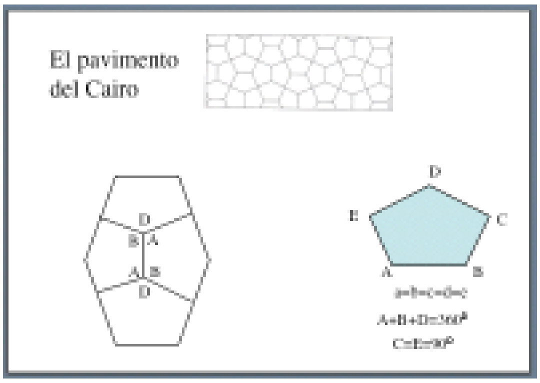
Pues bien, Kepler demuestra que hay exactamente 8 semi-regulares más que se añaden a los tres regulares que ya conocemos. En la siguiente figura se ven los esquemas de los mismos.




## 2.2. Otros polígonos que embaldosan

El problema de saber que otros polígonos pueden embaldosar el plano ha revelado ser mucho más interesante de lo esperado. Es fácil ver que todo triángulo, todo cuadrilátero o todo hexágono con un centro de simetría embaldosa el plano.

De entre los restantes el caso de los pentágonos es el más interesante.



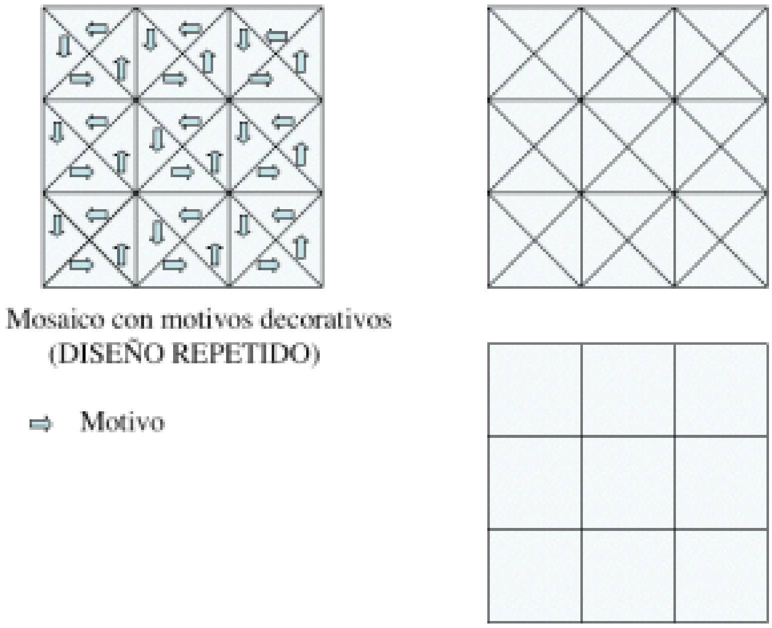

Hay pentágonos que si pavimentan, como el que se muestra en el dibujo de la izquierda, y cuyo mosaico se conoce como el del Cairo, ya que hay muchas aceras pavimentadas de esa forma en dicha ciudad. Hay más ejemplos que no vamos a mostrar. Lo curioso del caso es que todavía no se ha podido establecer el número de mosaicos diferentes que se pueden hacer con pentágonos. La historia del problema y sus falsas soluciones es, cuando menos, curiosa.

Hasta 1968 se conocían 5 tipos. En ese año R. Kershner encontró 3 tipos más y considero el problema resuelto. En 1975 Martin Gadner publicó un artículo de divulgación en Scientific American basado en el trabajo de Keshner y dando el problema por zanjado. Pero uno de sus lectores, Richard James III encontró otro más. A raíz de ello Marjorite Rice, otra lectora sin estudios previos de matemáticas empezó a investigar, y descubrió 4 más. . . . . . y la historia continua.

En la página http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html se listan los 14 tipos encontrados hasta ahora.

## 2.3. Mosaicos periódicos

Los mosaicos periódicos y su clasificación ya han sido citados anteriormente de forma somera, al referirnos a los mosaicos de la Alhambra y a los de Escher. Profundizaremos un poco más en estos dos conceptos. Recordemos que en matemáticas un mosaico es un recubrimiento del plano mediante regiones poligonales. Pero los mosaicos de la Alhambra o los de Escher están llenos de dibujos o motivos decorativos que no son poligonales y los seguimos llamando mosaicos. ¿Qué pasa aquí? Simplemente que en el proceso de abstracción, siempre necesario en matemáticas, nos fijamos en lo esencialmente geométrico que es común a todos los casos y dejamos de lado lo superfluo (desde el punto de vista matemático) como son los motivos decorativos. Veamos un ejemplo.




En la figura anterior, se presenta un mosaico con motivos decorativos, (se suelen llamar diseños repetidos), si prescindimos del motivo, nos quedamos con un mosaico (que ya responde a la definición matemática) formado por triángulos equiláteros. Cualquiera de esos triángulos al girarlos $90^{\text{o}}$,$180^{\text{o}}$ y$270^{\text{o}}$ en torno a uno de sus vértices da lugar a un cuadrado que trasladado horizontalmente y verticalmente recubre todo el plano. El hecho de existir una región del mosaico (o diseño repetido) que mediante traslaciones en dos direcciones diferentes permite reconstruir el mosaico es lo que caracteriza a los mosaicos periódicos. Para clasificarlos se usa su grupo de isometrías.

Una isometría en el plano es un movimiento que conserva la estructura geométrica del mismo, la imagen de una recta es una recta y la métrica, la distancia entre dos puntos coincide con la que hay entre sus imágenes. La composición de dos isometrías es una isometría. Toda isometría tiene inversa, es decir podemos deshacer el movimiento. Por lo tanto, el conjunto de isometrías de un plano es un grupo con respecto a la composición de movimientos.

Sólo hay 4 tipos de isometría del plano:

- **Simetría con respecto a una recta** $l$. También se le llama reflexión, ya que recuerda la imagen producida en un espejo, la recta que la determina se denomina eje de reflexión. Podemos afirmar que este es la isometría básica, ya que cualquier otra es composición de a lo sumo tres reflexiones. Podemos definirla de la siguiente manera:

  **Definición.** *Dado un punto $P$, sea $r$ la recta perpendicular a $l$ pasando por $P$. La imagen de $P$ por la simetría es el otro punto $Q$ de $r$ que dista de $l$ lo mismo que $P$. Si $P$ está en $l$ entonces $Q = P$.*

- **Traslación** es la composición de dos reflexiones con ejes paralelos

- **Giro** centrado en un punto, es la composición de dos reflexiones con ejes concurrentes en ese punto. El ángulo de giro es el doble del ángulo formado entre las rectas de reflexión (de la primera a la segunda, pues la composición de reflexiones no es commutativa).

  Diremos que un giro es de orden n si al componerlo consigo mismo n-veces nos da la identidad. Es lo mismo que decir que n veces ángulo de giro es un múltiplo entero de $360^{\text{o}}$.

- **Traslación deslizante.** Es la composición de tres traslaciones con ejes no concurrentes en un punto.

  Se puede demostrar que existen una recta $l$ y un punto $Q$ no en $l$ tal que la traslación deslizante es la composición de la reflexión con respecto a $l$ seguida del giro de $180^{\text{o}}$ con centro $Q$.

Dado un conjunto de puntos del plano, su grupo de isometría es el conjunto de isometrías del plano que conservan el conjunto.

Por ejemplo: si considero en el plano el conjunto de puntos con sus dos coordenadas números enteros ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), su grupo de isometrías estará formado por: traslaciones (ahora veremos cuales), giros de orden 2,4 y reflexiones con respecto a líneas paralelas a los ejes OX, OY o a las rectas $x = y$ o $x = -y$ junto con sus composiciones.

En el caso de las traslaciones, no nos vale cualquiera. Evidentemente la traslaciones dadas por los vectores $(0, 1)$ y $(1, 0)$ nos sirven. Además es fácil comprobar que cualquier traslación que deje fijo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es composición de las dos anteriores. En otras palabras, el subgrupo de traslaciones de grupo de isometrías de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ está generado por dos traslaciones con ejes directores no paralelos.

Un mosaico formado por teselas nos determina un subconjunto del plano: aquél dado por los vértices y las aristas de los distintos polígonos.

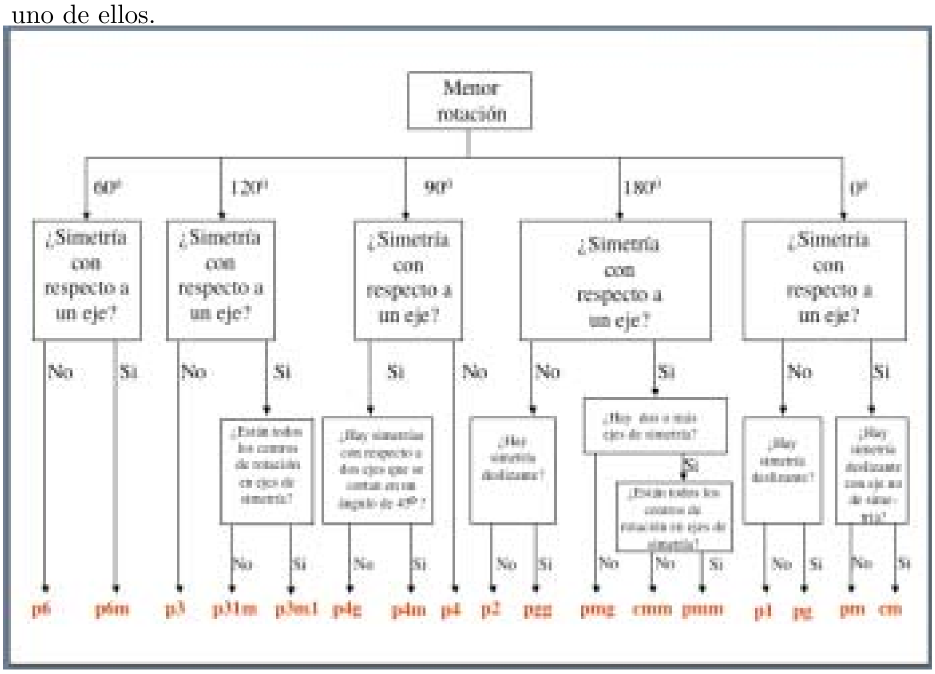
En el caso de un diseño repetido, podemos hablar también de su grupo de isometrías. Si dado un diseño (o un mosaico) nos encontramos que el subgrupo de traslaciones del grupo de isometrías del mismo está generado por dos traslaciones con ejes directores no paralelos, diremos que el diseño (o el mosaico) es periódico. En otro caso diremos que es no periódico.

Pasemos a la clasificación de los mosaicos periódicos, conocida desde principios del siglos pasado. En dicho caso lo que nos interesa es conocer que grupos de isometría pueden aparecer. Pues bien, se sabe desde 1904, que sólo existen 17 grupos no isomorfos que pueden ser grupos de isometría de un mosaico periódico. No es el momento de dar la demostración, el que la quiera ver puede ir al libro de George E. Martin. Lo que sí es interesante es aprender a distinguirlos. Para ello empezaremos por la clave de la demostración, la llamada restricción cristalográfica.

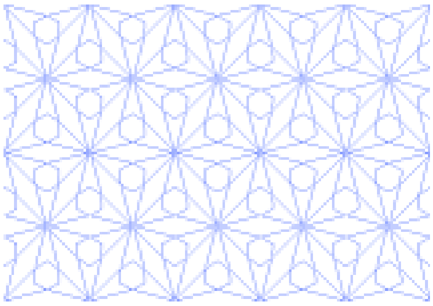
**Definición.** *En el grupo de isometrías de un mosaico periódico sólo puede haber giros de orden 2,3,4 o 6.*

La demostración es sencilla. Supongamos $P$ un centro de giro de orden $n$. Como las traslaciones llevan centros de giro de orden $n$ en centros de giro de orden $n$, y el subgrupo de traslaciones está generado por dos de ellas, no puede haber arbitrariamente cerca de $P$ otro centro de orden $n$. Consideremos $Q$ el más cercano. Si $R$ es el $n$ centro obtenido por el giro de orden $n$ de centro $Q$, resulta que si $n$ no es ni $2, 3, 4$, o 6, $R$ está más cerca de $P$ que $Q$. Esto es absurdo, ya que $Q$ era el más cercano.

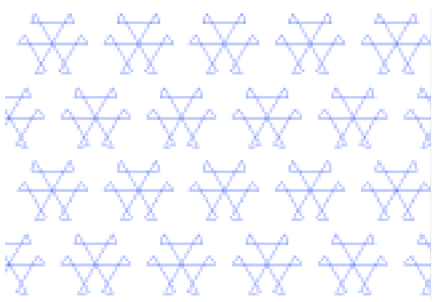
A partir de esta idea, existen algoritmos para determinar el grupo de isometría de un mosaico cualquiera. A continuación se presenta un diagrama con uno de ellos.




En la siguiente tabla, se muestran algunos ejemplos de diseños repetidos hechos por el autor con el programa KALI y clasificados usando el algoritmo anterior.

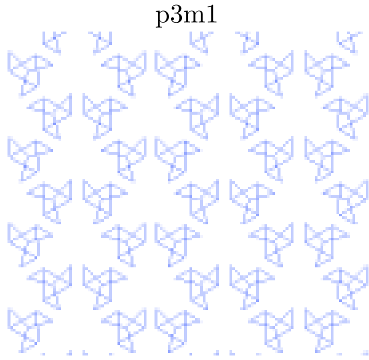


p6m



p3m1

p4m

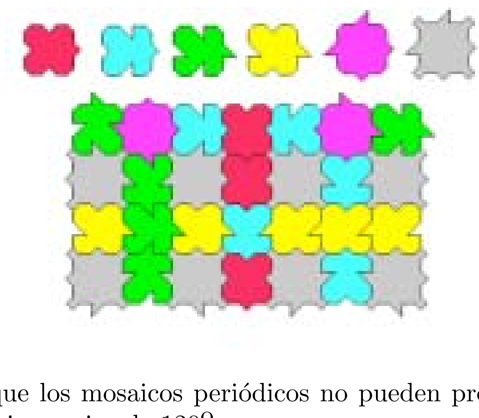


p31m

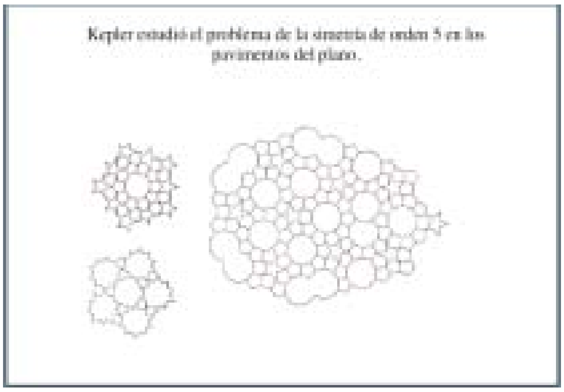
## 2.4. Mosaicos aperiódicos. Los mosaicos de Penrose

Si tenemos una colección de prototeselas que pavimentan el plano de forma no periódica y tal que ninguna subcolección permite pavimentar el plano de forma periódica hablaremos de que dicha colección es aperiódico.

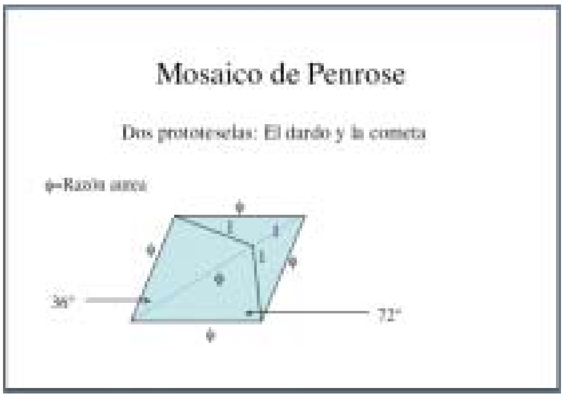
El problema que se plantea es la existencia de una colección finita y aperiódica de prototeselas. Berger en 1966 encuentra un ejemplo con 20.426 prototeselas como respuesta a la conjetura de Wang de la no existencia de mosaicos aperiódicos. Posteriormente dicha colección la reduce a 104. En 1971 Robinson crea un conjunto aperiódico con 6 teselas, que se muestra en la siguiente figura:



Ya hemos visto que los mosaicos periódicos no pueden presentar una simetría de orden 5, es decir un giro de $120^{\text{O}}$.

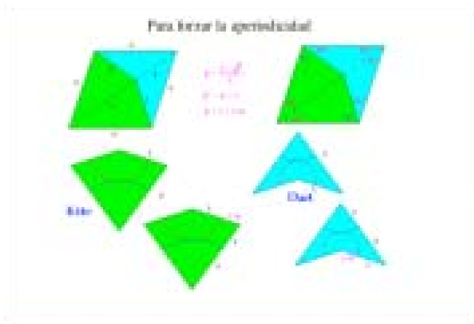



Kepler (siglo XVII) estudió el problema de la simetría de orden 5 en los pavimentos del plano. Alguno de los resultados obtenidos se muestran en los dibujos que aparecen a la izquierda. Su trabajo inspiró a Penrose (siglo XX) en la construcción de su conjunto aperiódico con sólo dos prototeselas.

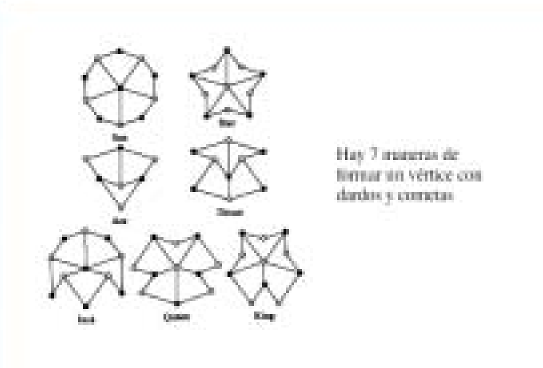



Sir Roger Penrose, un gran matemático en el campo de la física-matemática, trabaja en matemáticas recreativas. Ya en 1973, presentó un conjunto aperiódico con 5 prototeselas que muy pronto quedó eclipsado por la aparición de su famoso conjunto aperiódico, de 2 prototeselas, "el dardo y la cometa."

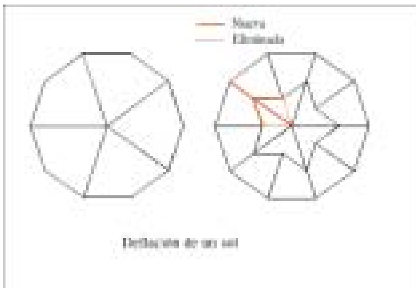
Por si solos, el dardo y la cometa no valen como protosteselas aperiódicas, pues realmente pavimentan el plano. Para comprobarlo, basta ver el siguiente dibujo, donde aparecen incluidas dentro de un pentágono regular y entre ambas forman un cuadrilátero, que como ya sabemos, pavimenta el plano.

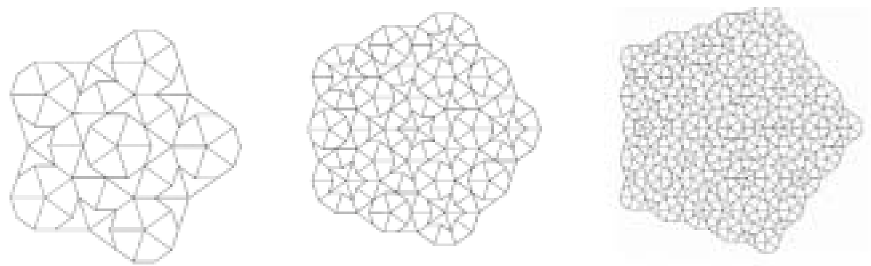

Para que realmente formen un conjunto aperiódico, necesitamos impedir que se puedan acoplar para formar el cuadrilátero anterior. Hay varias formas de hacerlo, la más elegante es la que se muestra a la derecha en la figura anterior. En ella se ve como se han dibujado dos curvas, una en cada pieza, y sólo se permiten las posiciones de acoplamiento que mantengan la continuidad de la curva. Así sólo hay 7 posibilidades de formar un vértice, como se muestra a continuación:




Para demostrar que el conjunto es aperiódico, se usan los procesos de inflación e deflación, por la que en el primero, se pasa de un mosaico de Penrose, a otro, también de Penrose con piezas de mayor tamaño.

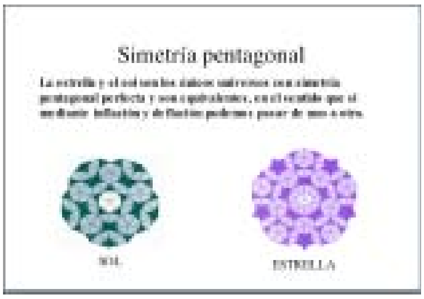

En el caso de la deflación, las piezas se empequeñecen, como se muestra en el ejemplo anterior con la deflación de la figura del sol. Ambos procedimientos son recursivos. Veamos como queda el sol después de un proceso de 4 deflaciones.



Paso 2 Paso 3 Paso 4

Si un mosaico de Penrose fuese periódico, podríamos escoger un generador del subgrupo de traslaciones del mismo. Dicho generador sería la traslación más pequeña, en esa dirección. Si repetimos varias veces el proceso de inflación, llegaría el momento en que un punto y su imagen por dicha traslación, estarían ambos dentro de una misma tesela, lo que es imposible. Por lo tanto el mosaico no puede ser periódico.

Se puede explorar el universo o los universos de los mosaicos de Penrose. Hay mucha literatura al respecto. los artículos de Martin Gadner y del propio Penrose son muy interesantes. Hay varias configuraciones que aparecen diseminadas en cualquier mosaico de Penrose. Por ejemplo, los imperios del Sol y la Estrella, o la rueda de carro, que se muestran a continuación.



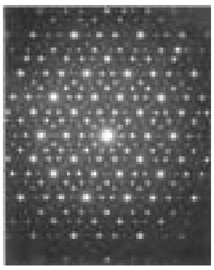


Hay infinitos mosaicos de Penrose diferentes, pero lo asombroso es que localmente son indistinguibles, es decir: dado un entorno de un punto de un mosaico cualquiera de Penrose, existe un entorno isométrico en algún otro punto de cualquier otro mosaico de Penrose.

En resumen, el mundo de los mosaicos de Penrose es fascinante e intrigante. Abre numerosas perspectivas de exploración, tanto para los amantes de las matemáticas recreativas como para los matemáticos profesionales en su afán por comprender los misterios que encierran. Para rematar la faena, un descubrimiento casual de los cuasicristales realizado en 1984, da lugar a la aplicación al campo de la química de algo pensado como un juego matemático.

## 2.5. Los quasicristales y la sartén antiadherente

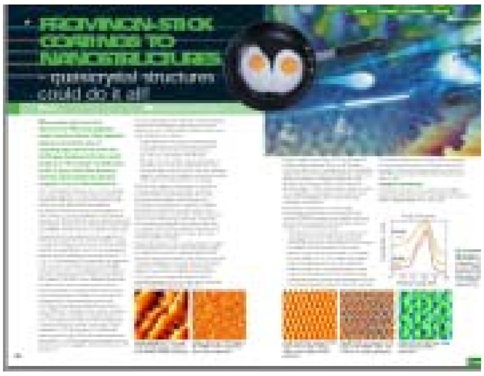
Desde el punto de vista de la química, hasta 1984, sólo había dos tipos de materiales, amorfos y cristalinos. Los cristalinos presentan un orden interno. que generalmente se detectaba mediante su espectro de rayos X. Éste presenta una gran simetría y respeta la restricción cristalográfica, es decir, sólo existen simetrías de orden 2,3,4,6.



Difracción de un cuasicristal

En 1984, D. Schechtman descubre un tipo de aluro de alumnio cuyo patrón de difracción tiene simetría de orden 5. Se han usando los mosaicos de Penrose como base para obtener un modelo matemático de la disposición de los átomos de los cuasicristales. El tema ha abierto un campo de investigación en matemáticas, que está en plena expansión.

Los cuasicristales también han abierto un campo nuevo en la química y la física del estado sólido. Se están descubriendo propiedades muy interesantes de esas estructuras, por ejemplo, una fina capa de cuasicristal, tiene propiedades antiadherentes parecidas a las del teflón, por lo que ya se están anunciando sartenes antiadherentes con superficie cuasicristalina.



Hasta aquí, esta conferencia de introducción a un tema que ha resucitado por una parte, gracias a la química y por otro lado debido a un movimiento intelectual que pugna por reintroducir los temas de geometría clásica en las aulas. Termino con una lista de páginas web, que me han servido de inspiración y de las que he obtenido alguna de las figuras mostradas en la conferencia. Añado, así mismo, una pequeña bibliografía sobre el tema, para los que estén interesados en profundizar. Muchas gracias.

## 3. Referencias


- Una página muy completa, con numerosos ejemplos de mosaicos históricos. Tiling Plane and Fancy

  `http://www2.SPSU.edu/math/tile/index.htm`

- Una buena página, radicada en España, sobre Escher,

  `http://www.uv.es/~buso/escher/index_es.html`

- Una página dedicada a proporcionar recursos para la docencia en geometría. Se puede experimentar con Kali y Quasitiler.

  `http://www.ScienceU.com/geometry/articles/tiling`

- En la página del proyecto Descartes Ministerio de Educación español hay una unidad didáctica, muy interesante, sobre mosaicos.

  `http://descartes.cnice.mecd.es/`

- Un applet de Java para jugar con los mosaicos de Penrose.

  `http://www.geocities.com/SiliconValley/Pines/1684/Penrose.html`

Artículos y libros sobre el tema:

- Es interesante el articulo de Doris Schattschneider *The Plane Symmetry Groups, Their Recognition and Notation.* American Mathematical Monthly 85 (1978): 439-450.

- Indispensable leer el artículo de Martin Gadner titulado “Extraordinario mosaico no periódico que enriquece la teoría del teselado”en Investigación y Ciencia.

- El artículo de Penrose, *Pentaplexity. A class of Non-periodical Tilings of the plane*, aparecido en Eureka se ha re-impreso en Intelligencer.

- Para el estudio de las isometrías del plano y la clasificación de los grupos de isometría de los mosaicos periódicos, recomiendo

  George E. Martin, *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry* , Springer, Berlin 1987

- Para profundizar sobre el tema de los cuasicristales y su relación con la geometría,

  Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

- Para finalizar, un libro de referencia:

  Grünbaum, Branko and Geoffrey Shephard, *Tilings and Patterns.* New York: W. H. Freeman, 1987.